# نظریهٔ صف

محمد مدرس یزدی

# Queuing Theory

Mohammad Modarres Yazdi

نظریهٔ صف
تألیف دکتر محمد مدرس یزدی
ویراستهٔ علیرضا جباری
مرکز نشردانشگاهی، تهران
چاپ اول ۱۳۷۰
تعداد ۳۰۰۰
حروفچینی: مهدی
لیتوگرافی: بهزاد
چاپ و صحافی: معراج
۱۸۰۰ ریال


مدرس یزدی، محمد
نظریهٔ صف
ص ع به انگلیسی Mohammad Modares Yazdi Queuing theory
واژه‌نامه ص
کتابنامه ص
۱ صف‌بندی. نظریه الف مرکز نشردانشگاهی ب عنوان
۵۱۹/۸۲ ۱۵۷/۹

## فهرست

بسم‌الله الرحمن الرحیم

## پیشگفتار

نظریهٔ‌صف یکی‌از مهمترین زمینه‌های کاربرد نظریهٔ احتمالات و فرایندهای تصادفی است. باتوجه بـه‌نقش و اهمیت اقتصادی و اجتماعـی صف درزمینه‌هـای مهندسی، مخابرات، سیستمهای‌حمل‌و نقل،کامپیوتر، خدمات، تولید، و سیستمهای اجتماعی، بسیاری از مهندسان و ریاضیدانان از سالها قبل به‌تحقیق دراین زمینه پرداخته‌اند. دراین تحقیقات، همگام با بسط روشهای تحلیلی به‌ارائهٔ‌کاربردهای جدید نیز توجه زیادی شده است.

باتوجه‌به‌توسعهٔ گستردهٔ نظریهٔ‌صف، اکنون‌سالهاست که‌تدریس آن منحصر به‌رشته‌های ریاضی و آمار نیست، بلکه به‌آموزش آن دررشته‌های مهندسی صنایع، مخابرات،کامپیوتر، مدیریت، اقتصاد، آمار و ریاضی، و نظایر اینها اهمیت زیادی داده می‌شود. کتاب حاضر، دردرجهٔ اول برای استفادهٔ دانشجویان‌کارشناسی وکارشناسی ارشد رشته‌هـای فوق تألیف شده‌است، اما درعین‌حال می‌تواند مورد استفادهٔ مهندسان و سایـر کسانی قـرار گیرد که به‌نوعی با طراحی و تحلیل سیستمهای اقتصادی، اجتماعی، و مهندسی‌سروکار دارند. بدین لحاظ، درنگارش‌کتاب سعی شده است کـه مفاهیم اصلی و کاربردی تحت‌الشعاع اثباتهای پیچیدهٔ ریاضی‌واقع نشود؛ باوجود این‌ازبیان مبانی ریاضی و آماری‌مربوطه نیزصرف‌نظر نشده است، زیرا اساساً نظریهٔ صف برپایهٔ اصول ریاضی بنا نهاده شده است.

درفصل اول‌کتاب، به ارائهٔ تعریف سیستمهای صف و برخی تعاریف مقدماتی لازم برای درك نظریهٔ‌صف پرداخته‌ایم.

فصل‌دوم‌کتاب، به‌اختصاربه‌مرور احتمالات می‌پردازد و به‌خصوص به‌اهمیت‌کاربرد احتمال‌شرطی وامید ریاضی‌شرطی درمحاسبهٔ عبارتهای احتمالی تأکید می‌شود. درفصلهای سوم‌وچهارم، فرایندهای احتمالی، به‌خصوص، نقش‌توزیع‌نمایی و فرایند پواسون وفرایند مارکوف مورد بررسی قرار می‌گیرند. در بسیاری ازکتابهای نظریهٔ صف، تنها اشاره‌ای به‌این مباحث می‌شود و بررسی بیشتر را به‌کتابهای مربوط به‌فرایندهای تصادفی واگذار می‌کنند. لیکن، چون در دانشگاههای مـا درس فرایندهای تصادفی پیش‌نیاز نظریهٔ صف

نیست، در این کتاب، به تشریح این مباحث توجه بیشتری می‌شود. بدین‌ترتیب، در فصلهای اول تا چهارم، مقدمات لازم برای درک مفاهیم نظریهٔ صف فراهم می‌شود. در فصل پنجم، به کلیات سیستمهای صف و تشریح رابطه‌های مربوط به این سیستمها، صرف‌نظر از ویژگیهای آن می‌پردازیم. در سه فصل ششم و هفتم و هشتم، حالتهای خاص سیستمهای صف بررسی می‌شوند. در فصل نهم نیز نحوهٔ بهینه‌سازی و بررسی عوامل قابل تغییر (یا متغیرهای تصمیم) در سیستمهای صف مورد بحث قرار می‌گیرند.

در همهٔ فصول کتاب، مثالهای حل‌شدهٔ متعددی ارائه می‌شود. این مثالها کاربردهای نظریهٔ صف را نیز نشان می‌دهند. در پایان هر فصل نیز تعداد نسبتاً زیادی مسائل حل‌نشده برای تمرین و همچنین آشنایی با زمینه‌های کاربرد مدلها ارائه می‌شود.

در اینجا لازم است از همهٔ دانشجویانی که در تصحیح جزوات، و ارائهٔ پیشنهادهای مفید مؤلف را مساعدت و راهنمایی کرده‌اند تشکر کنم. از همکاری دست‌اندرکاران مرکز نشر دانشگاهی، به‌خصوص کارکنان حوزهٔ فنی مهندسی سپاسگزارم.

**محمد مدرس**



# ۱

# سیستمهای صف

انتظار در صف هرچند بسی ناخوشایند است، اما متأسفانه بخشی از واقعیت اجتناب‌ناپذیر زندگی را تشکیل می‌دهد. انسانها، در زندگی روزمرهٔ خود با انواع مختلف صف، که به از بین رفتن وقت، نیرو و سرمایهٔ آنها می‌انجامد، روبه‌رو می‌شوند. اوقاتی که در صفهای اتوبوس، باهارجوری، خرید و نظایر آنها به‌هدر می‌رود، نمونه‌های ملموسی از این نوع اتلافها در زندگی است. در جوامع امروزی، صفهای مهمتری وجود دارد، که هزینه‌های اقتصادی، و اجتماعی آنها به‌مراتب بیش از نمونه‌های سادهٔ فوق است. از آن‌جمله می‌توان صفهای حاصل از ترافیک شهری، و نیز صفهایی را که در فرودگاهها، بنادر، مؤسسات مخابراتی و در پشت فرایندهای تولید تشکیل می‌شود، نام برد. در مجموع، شاید بتوان گفت که انتظار در صف دیگر استثنا نیست و به‌صورت قاعده درآمده است.

از بین بردن نتایج نامساعد انتظار در صف بدون شناخت خصائص این پدیده امکان‌پذیر نیست. **نظریهٔ صف**، که به مطالعهٔ صفها از دیدگاه ریاضی می‌پردازد، تأثیر عوامل تشکیل‌دهندهٔ صف و راههای منطقی کاهش زمان انتظار را بررسی می‌کند. اگرچه هیچ‌گاه نمی‌توان صف را کلاً از میان برد، اما می‌توان که صایعات ناشی از آن را حتی‌الامکان کاهش داد.

نیست، در این کتاب، به تشریح این مباحث توجه بیشتری می‌شود. بدین‌ترتیب، در فصلهای اول تا چهارم، مقدمات لازم برای درك مفاهیم نظریهٔ صف فراهم می‌شود. در فصل پنجم، به کلیات سیستمهای صف و تشریح رابطه‌های مربوط به این سیستمها، صرف‌نظر از ویژگیهای آن می‌پردازیم. در سه فصل ششم و هفتم و هشتم، حالتهای خاص سیستمهای صف بررسی می‌شوند. در فصل نهم نیز نحوهٔ بهینه‌سازی و بررسی عوامل قابل‌تغییر (یا متغیرهای تصمیم) در سیستمهای صف مورد بحث قرار می‌گیرند.

در همهٔ فصول کتاب، مثالهای حل‌شدهٔ متعددی ارائه می‌شود. این مثالها کاربردهای نظریهٔ صف را نیز نشان می‌دهند. در پایان هر فصل نیز تعداد نسبتاً زیادی مسائل حل‌نشده برای تمرین و همچنین آشنایی با زمینه‌های کاربرد مدلها ارائه می‌شود.

در اینجا لازم است از همهٔ دانشجویانی که در تصحیح جزوات، و ارائهٔ پیشنهادهای مفید مؤلف را مساعدت و راهنمایی کرده‌اند تشکر کنم. از همکاری دست‌اندرکاران مرکز نشر دانشگاهی، به‌خصوص کارکنان حوزهٔ فنی‌مهندسی سپاسگزارم.

**محمد مدرس**



# ۱

# سیستمهای صف

انتظار در صف هرچند بسی ناخوشایند است، اما متأسفانه بخشی از واقعیت اجتناب‌ناپذیر زندگی را تشکیل می‌دهد. انسانها، در زندگی روزمرهٔ خود با انواع مختلف صف، که به از بین رفتن وقت، نیرو و سرمایهٔ آنها می‌انجامد، روبه‌رو می‌شوند. اوقاتی که در صفهای اتوبوس، ناهارخوری، خرید و نظایر آنها به‌هدر می‌رود، نمونه‌های ملموسی از این نوع اتلافها در زندگی است. در جوامع امروزی، صفهای مهمتری وجود دارد، که هزینه‌های اقتصادی، و اجتماعی آنها به‌مراتب بیش از نمونه‌های سادهٔ فوق است. از آن‌جمله می‌توان صفهای حاصل از ترافیك شهری، و نیز صفهایی را که در فرودگاهها، بنادر، مؤسسات مخابراتی و در پشت فرایندهای تولید تشکیل می‌شود، نام برد. در مجموع، شاید بتوان گفت که انتظار در صف دیگر استثنا نیست و به‌صورت قاعده درآمده است.

از بین بردن نتایج نامساعد انتظار در صف بدون شناخت خصائص این پدیده امکانپذیر نیست. نظریهٔ صف، که به مطالعهٔ صفها از دیدگاه ریاضی می‌پردازد، تأثیر عوامل تشکیل‌دهندهٔ صف و راههای منطقی کاهش زمان انتظار را بررسی می‌کند. اگرچه هیچ‌گاه نمی‌توان صف را کلاً از میان برد، اما می‌توان که ضایعات ناشی از آن را حتی‌الامکان کاهش داد.

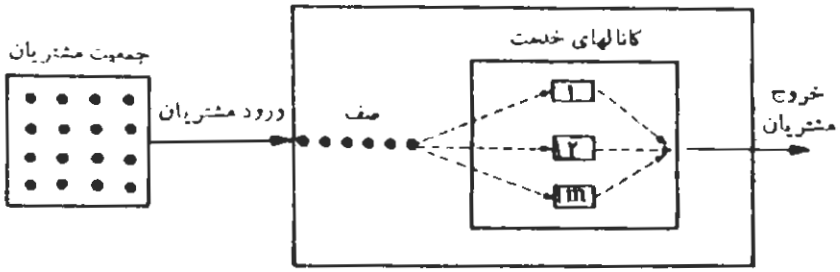
## ۱.۱ اجزای سیستم صف

صف چیست؟ سیستمی را درنظر بگیرید که خدمتی را ارائه می‌کند. متقاضیانی برای دریافت این خدمت مراجعه می‌کنند، که آنها را اصطلاحاً **مشتری** می‌نامند. خدمت‌موردنظر توسط شخص، ماشین و یا امکانات دیگر، که **خدمت‌دهنده** نامیده می‌شوند، ارائه می‌شود. هنگامی که یك مشتری جهت دریافت خدمت موردنظر به سیستم مراجعه می‌کند، دو حالت ممکن است اتفاق بیفتد. اگر حداقل یکی از خدمت‌دهندگان بیکار باشد، بلافاصله ارائهٔ خدمت به مشتری جدید شروع می‌شود. اما چنانچه تمام خدمت‌دهندگان مشغول به کار باشند، مشتری باید منتظر بماند؛ و بدین‌ترتیب، **صف** تشکیل می‌شود. بنابراین، درهرسیستمی که خدمتی را عرضه می‌کند، چنانچه در یك لحظه تعداد مشتری بیش از ظرفیت سیستم (یعنی تعداد خدمت‌دهندگان) باشد، بی‌شك صف تشکیل خواهد شد. یادآوری می‌کنیم که مشتری و خدمت دهنده لزوماً انسان نیستند و صف مورد بحث نیز لزوماً معنای فیزیکی نخواهد داشت. مثلاً سیستم تعمیرات یك کارخانه را در نظر بگیرید. ماشینی که خراب شده است و منتظر تعمیرکار است، مشتری محسوب می‌شود. در این مدت، این ماشین در محل استقرار خود جا می‌گیرد، نه در یك صف فیزیکی؛ اما چون منتظر دریافت خدمت است، نوعی از صف، به‌معنای مورد بحث دراین مبحث، محسوب می‌شود.

**مشتریهای بالقوهٔ سیستم**، یا به‌عبارت دیگر مجموعهٔ مشتریهایی که امکان دارد برای دریافت خدمت ارائه شده مراجعه کنند، را **جمعیت مشتریان بالقوه** می‌نامند.

با توجه به مطالب فوق یك سیستم صف را، به طور کلی، مطابق شکل ۱.۱ می‌توان نشان داد.

مطابق شکل فوق، مشتری، که عنصری از جمعیت مشتریان بالقوه است، وارد سیستم می‌شود. اگر خدمت دهندگان بیکار نباشند، این مشتری در صف منتظر می‌ماند، تا نوبت به او برسد. پس از دریافت خدمت مورد نظر، از سیستم خارج می‌شود. اگر حداقل یکی از خدمت دهندگان بیکار باشد، مشتری بدون انتظار در صف، خدمت مورد نظر را دریافت و سیستم را ترك می‌کند.




**شکل ۱.۱** اجزای یك سیستم صف.



## ۲.۱ معیارهای ارزیابی یك سیستم صف

برای سنجش عملکرد یك سیستم صف، عمدتاً از سه معیار زیر بهره می‌گیرند؛ اگرچه، برحسب مورد می‌توان از معیارهای دیگر نیز استفاده کرد.

۱. **طول صف** (تعداد مشتریهایی که در صف منتظر دریافت خدمت هستند) یا تعداد مشتریان داخل سیستم.

۲. **زمان انتظار** هرمشتری درصف یا سیستم. لازم به‌یادآوری است که مدت انتظار در سیستم، مجموع زمان انتظار در **صف** به اضافهٔ مدت زمانی است که مشتری در حال دریافت خدمت است.

۳. **درصدی از زمان** که سیستم به علت نبودن مشتری بیکار است (یا درصدی از زمان که سیستم مشغول به‌کار است).

باید درنظر داشت که، در اکثر سیستمها، معیارهای فوق ماهیت تصادفی دارند. در نتیجه، معیار ارزیابی سیستم، امید ریاضی این متغیرهای تصادفی خواهد بود.

## ۳.۱ ورودیهای سیستم

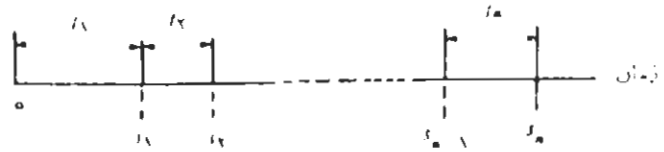
عملکرد سیستم به عوامل متعدد (**یا ورودیهای سیستم**) بستگی دارد، که عمده‌ترین آنها عبارت‌اند از:

### الف. الگوی ورود مشتری

بازدهی سیستم و معیارهای ارزیابی آن، یعنی طول صف، مدت انتظار و درصد بیکاری سیستم، بستگی به تعداد مشتریهایی دارد که مراجعه می‌کنند. طبعاً هرچه تعداد مراجعین بیشتر باشد، طول صف ومدت‌زمان انتظار مشتری زیادتر و درصدبیکاری سیستم کمتر است. فرض کنید که اولین مشتری در زمان $s_1$، دومی در زمان $s_2$ و به همین ترتیب $n$امین مشتری در زمان $s_n$ وارد سیستم شوند. **زمان بین دو ورود متوالی** مشتریها را می‌توان به‌شرح زیر تعریف کرد:

$$t_1 = s_1$$
$$t_2 = s_2 - s_1$$
$$t_n = s_n - s_{n-1}$$

برای مشخص کردن **الگوی** ورود مشتری، مشخص کردن $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ ضروری است. با توجه به اینکه زمان ورود مشتریها ماهیت تصادفی دارد، بدیهی است که زمانهای بین دو ورود متوالی نیز متغیرهای تصادفی هستند. برای بررسی دقیق رابطه‌های ریاضی حاکم بر سیستم صف و محاسبهٔ معیارهای ارزیابی آن، شناخت تابع توزیع این متغیرهای




**شکل ۲-۱** زمان ورود و فاصلهٔ زمانی بین دو ورود متوالی مشتریها

تصادفی ضرورت دارد. اگر تابع توزیع این متغیر تصادفی را با $A(t)$ نشان دهیم، خواهیم داشت

$$A(t) = \mathcal{P}(t \leqslant t) \qquad (۱-۱)$$

یک کمیت مفید برای بررسی الگوی ورود مشتری، **آهنگ ورود مشتری** است، که طبق تعریف میانگین تعداد مشتریهایی است که در واحد زمان وارد سیستم می‌شوند. آهنگ ورود مشتری را معمولاً با $\lambda$ نشان می‌دهند. بدیهی است که $\lambda$ برابر با عکس میانگین زمان بین دو ورود متوالی است. مثلاً، ساده‌ترین حالت را در نظر بگیرید، که در آن زمان بین دو ورود متوالی مشتریها ثابت و برابر با نیم‌ساعت باشد. در این صورت، تعداد مشتریهایی که در ساعت وارد سیستم می‌شوند، برابر با ۲ است.

ورود مشتریها به‌صورت انفرادی، یا به‌صورت **گروهی** است. در مورد ورودهای گروهی، مثلاً، ورود مشتریانی که همزمان به وسیلهٔ اتوبوس وارد یک مهمانخانهٔ بین راه می‌شوند، غالباً با دو متغیر تصادفی سروکار داریم: یکی زمان بین دو ورود متوالی گروهها و دیگری تعداد مشتریهای هر گروه.

عامل مهم دیگر، **همگن** بودن یا نبودن الگوی ورود مشتریها برحسب زمان است. آهنگ ورود مشتری می‌تواند در زمانهای مختلف ثابت، و یا غیرثابت باشد. مثلاً، الگوی ورود مشتری به یک سیستم تلفن، که در آن تعداد متقاضیان مکالمه در ساعات شبانه‌روز یکسان نیست، غیرثابت است.

در برخی از سیستمها، آهنگ ورود مشتری به طول صف نیز بستگی دارد. مثلاً، اگر طول صفی زیاد باشد، ممکن است مشتری از ورود به این سیستم صف منصرف شود و به سیستم دیگری مراجعه کند. لذا در چنین سیستمی، آهنگ ورود مشتری آرامتر از آهنگ ورود مشتری در سیستم متشابهی است که صف طولانی ندارد.

### ب. الگوی خدمت‌دهی

شناخت **الگوی خدمت دهی** (مدت زمانی که ارائهٔ خدمت به یک مشتری طول می‌کشد) نیز برای سنجش عملکرد سیستم ضرورت دارد. بدیهی است هرچه مدت خدمت‌دهی کمتر باشد، طول صف و زمان انتظار مشتریها نیز کمتر خواهد شد. مدت زمان خدمت هم معمولاً





ماهیت تصادفی دارد، و لذا برای محاسبهٔ معیارهای ارزیابی سیستم، تابع توزیع این متغیر تصادفی باید معلوم باشد. فرض کنید که مدت خدمت‌دهی به یک مشتری برابر با $X$ باشد. اگر تابع توزیع این متغیر تصادفی را با $B(X)$ نشان دهیم، رابطهٔ زیر را خواهیم داشت:

$$B(X) = \mathcal{P}[X \leqslant x] \qquad (۲-۱)$$

**آهنگ خدمت‌دهی**، طبق تعریف، عبارت از میانگین تعداد مشتریانی است که در واحد زمان از یک خدمت‌دهنده خدمت دریافت می‌کنند. اگر آهنگ خدمت‌دهی را با $\mu$ نشان دهیم، بدیهی است که بین $\mu$ و مدت خدمت دهی، یعنی $X$، رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\mu = \frac{1}{E(X)} \qquad (۳-۱)$$

از طرف دیگر، **آهنگ خروج مشتریان** را می‌توان میانگین تعداد مشتریانی تعریف کرد که در واحد زمان از سیستم خارج می‌شوند. بدیهی است که آهنگ خروج مشتریان بستگی به آهنگ خدمت‌دهی، تعداد خدمت‌دهنده و تعداد مشتریهای داخل سیستم دارد. مثلاً، اگر سیستم فقط دارای یک خدمت‌دهنده و این خدمت‌دهنده نیز دائماً مشغول به‌کار باشد، آهنگ خروج مشتریان و آهنگ خدمت‌دهی یکسان خواهد بود.

مدت خدمت‌دهی، ممکن است مستقل از طول صف و یا وابسته به‌آن باشد. مثلاً، در صورتی که طول صف زیاد شود، خدمت‌دهنده ممکن است (مثلاً با استفاده از ابزار بهتر) بر سرعت کار خود بیفزاید.

در این الگو نیز مدت خدمت‌دهی ممکن است نسبت به زمان ثابت یا متغیر باشد. مثلاً، اگر خدمت‌دهنده ماشینی باشد که در اثر فرسودگی کارایی آن پایین بیاید، طبعاً با مرور زمان مدت‌زمان خدمت‌دهی نیز افزایش می‌یابد.

خدمت‌دهنده نیز ممکن است همزمان به ارائهٔ خدمت به یک یا چند مشتری بپردازد.

### ج. تعداد خدمت‌دهندگان

تعداد خدمت‌دهندگان در بازدهٔ سیستم مؤثر است. این خدمت‌دهندگان به‌صورت موازی عمل می‌کنند؛ یعنی، هرکدام به‌طور مستقل به‌یکی از مشتریها خدمت می‌دهند. گاهی به‌جای خدمت دهنده، از عبارت **کانال خدمت** استفاده می‌شود.

### د. ظرفیت صف

منظور از **ظرفیت صف** حداکثر تعداد مشتریانی است که می‌توانند در صف قرار گیرند.

ظرفیت صف یا بینهایت، یا متناهی است. متناهی بودن ظرفیت صف می‌تواند ناشی از محدودیت فضای داخل سیستم مورد نظر باشد. در حالتی که ظرفیت صف متناهی باشد، ورود مشتریها تا زمانی ادامه می‌یابد که طول صف کمتر از ظرفیت آن باشد و از آن‌پس، از ورود مشتری جلوگیری می‌شود. درچنین حالتی فرض براین است که این مشتری دیگر منتظر نماند و از مراجعهٔ مجدد به‌سیستم منصرف گردد.

**هـ. جمعیت مشتریان بالقوه**

طول صف و مدت زمان انتظار در صف و همچنین بیکار بودن سیستم، به جمعیت مشتریان (یعنی **مشتریان بالقوهٔ سیستم**) نیز بستگی دارد. اگر تعداد مشتریانی که می‌توانند مراجعه کنند (به‌عنوان مثال، تعداد مشتریان یك سیستم تلفن در یك شهر بزرگ) خیلی زیاد باشد، جمعیت مشتریان را می‌توان نامتناهی فرض کرد؛ ولی، درمواردی جمعیت مشتریان ممکن است متناهی باشد. این حالت از جمله در مورد ماشینهایی که در یك کارگاه ممکن است خراب شوند و منتظر تعمیر بمانند، صدق می‌کند.

**و. نظم سیستم**

منظور از **نظم سیستم**، نحوهٔ انتخاب مشتریهای داخل صف برای ارائهٔ خدمت است. در یك سیستم، موقعی که یکی از خدمت‌دهندگان بیکار و آمادهٔ ارائهٔ خدمت می‌شود، ضابطه‌های مختلفی برای انتخاب مشتری بعدی می‌تواند وجود داشته باشد. متداولترین روش، در نظر گرفتن نوبت است؛ یعنی اینکه کسی که زودتر وارد سیستم شده، و جلوتر از همه در صف قرار گرفته باشد، زودتر انتخاب می‌شود. این نظم را FIFO[1] می‌نامند. در برخی سیستمها ممکن است انتخاب مشتری برخلاف ضابطهٔ فوق باشد؛ یعنی، آن مشتری انتخاب شود که دیرتر از همه وارد سیستم شده است. نامه‌هایی که برای تایپ روی میز ماشین‌نویس انباشته می‌شود، معمولا با این ضابطه ماشین می‌شود. به این نظم LIFO[2] می‌گویند. پایه دیگری برای انتخاب، ممکن است تصادف باشد، که SIRO[3] نامیده می‌شود؛ این مورد از جمله انتخاب قطعات یدکی در یك انبار را شامل می‌شود.

درنظر گرفتن **اولویت** برای مشتریهای مختلف، یکی ازمباحث مهم نظریهٔ صف است. در بسیاری از سیستمها، اهمیت مشتریها متفاوت است. برای گروههای مختلف مشتری، برحسب اهمیتی که برای سیستم دارند، اولویتهای گوناگون درنظر گرفته می‌شود. در بعضی از سیستمها، برخی از مشتریان ازچنان اولویت بالایی برخوردارند، که به محض ورود به‌سیستم، ارائهٔ خدمات به آنها شروع می‌شود. درمورد این مشتریها، خدمت دهنده موظف

1. First-In First-Out 2. Last-In First-Out
3. Service In Random Order





است بلافاصله کار خدمت دهی به‌آنها را شروع کند و حتی اگر لازم باشد کار خدمت‌دهی به مشتریهای دیگر را نیمه تمام بگذارد. در بعضی از سیستمها ارائهٔ خدمت نیمه تمام نمی‌ماند، اما به مشتریایی با اولویت بالا، خدمت خارج از نوبت ارائه می‌شود.

**ز. مراحل خدمت**

در بعضی از سیستمها، خدمت ارائه شده شامل چند مرحله است. مثلا، برای دریافت مجوز ازیك سازمان دولتی باید چندین مرحله را پشت سر گذاشت. سیستمهایی با خدمات چند مرحله‌ای انواع مختلف دارند، که از جمله می‌توان سیستمهایی با مراحل خدماتی سری، موازی و ترکیبی از سری و موازی را نام برد

## ۴.۱ نحوه نمایش یك سیستم صف

یك سیستم صف را درحالت کلی به‌طور قراردادی به‌صورت $A/B/M/K/C/Z$ نشان می‌دهند. هر کدام‌ازشش‌حرف‌فوق‌معرف‌یکی‌ازعوامل اصلی سیستم‌است. $A$ یا $A(X)$ تابع توزیع زمان بین دو ورود، $B$ یا $B(X)$ تابع توزیع مدت خدمت‌دهی، $m$ تعداد خدمت دهنده، $K$ ظرفیت سیستم، $C$ جمعیت مشتریان و $Z$ نظام سیستم را نشان می‌دهد.

در قرارداد فوق، به جای $A$ یا $B$، برحسب اینکه چه تابع توزیعی داشته باشند، از حروف زیر به‌عنوان کد استفاده می‌شود:

| تابع توزیع | کد |
|---|---|
| نمایی | $M$ |
| ارلانگی با $r$ مرحله | $E_r$ |
| قطعی | $D$ |
| کلی | $G$ |

اگر ظرفیت صف بینهایت باشد، چهارمین حرف (یعنی $K$) و اگر جمعیت مشتریان بالقوه بینهایت باشد، پنجمین حرف (یعنی $C$) را می‌توان حذف کرد. همچنین اگر نظم سیستم برمبنای نوبت (یعنی FIFO) باشد، ششمین حرف نیز حذف می‌شود.

مثلا، $M/M/۳$ معرف سیستم صفی است که زمان بین ورود متوالی دومشتری به‌صورت نمایی، مدت خدمت‌دهی به صورت نمایی و تعداد خدمت‌دهنده ۳ است. دراین سیستم، ظرفیت صف و جمعیت مشتریان بالقوه، بینهایت فرض شده ونظام سیستم بر مبنای رعایت نوبت است.

$D/E_۵/۱/۱۰۰/\text{LIFO}$ معرف سیستم صفی است که‌در آن زمان بین ورود متوالی

مشتریها ثابت (قطعی)، مدت خدمت طبق توزیع ارلانگی ۵ مرحله‌ای، سیستم دارای یك خدمت‌دهنده، ظرفیت آن ۱۰۰، جمعیت مشتریان نامتناهی و تنظیم سیستم به‌صورت LIFO است.

## ۵.۱ زمینه‌های کاربرد نظریهٔ صف

همان طور که گفته شد، اهمیت نظریهٔ صف از کاربرد وسیع آن در سیستمهای صنعتی و اجتماعی ناشی می‌شود. در زیر به بعضی از این کاربردها اشاره می‌کنیم.

### الف. سیستمهای مخابراتی

قدیمی‌ترین زمینهٔ استفاده از نظریهٔ صف، سیستمهای مخابراتی است. در واقع باید گفت که این نظریه در خدمت مخابرات به‌وجود آمد. در اوائل قرن بیستم ارلانگ[1] دربارهٔ ظرفیت خطوط تلفن به مطالعه پرداخت. شبکهٔ مخابرات، سیستم صفی است که مشتریها برای مکالمه به آن مراجعه می‌کنند. چون امکان ندارد که برای هر دو نفر مشترك، یك خط تلفن اختصاصی ایجاد شود، لذا کلا تعداد محدودی خط تلفن برای استفادهٔ همهٔ مشترکین به‌وجود می‌آید. اگر در یك لحظه تعداد خطوط موجود تکافوی همهٔ نیازها را ندهد، صف تشکیل می‌شود.

بررسی ارلانگ، در قالب نظریه‌های ریاضی، احتمالات و آمار، به تدریج توسعه یافت و نظریهٔ صف به‌وجود آمد. در دورهٔ بعد از جنگ دوم جهانی، که با رشد سریع تحقیق در عملیات و علوم و فنون وابسته به آن همراه بود، نظریهٔ صف نیز کاربردهای متعدد دیگری یافت؛ اما، مخابرات همچنان یکی از مهمترین کاربردهای این رشته است.

### ب. شبکهٔ حمل و نقل

به‌طور کلی شبکه‌های حمل و نقل نوعی سیستم صف‌اند. خدمتی که عرضه می‌شود، حمل بار و مسافر از یك نقطه به نقطهٔ دیگر است. خدمت‌دهندگان ممکن است وسایل حمل و نقل و شبکهٔ راهها باشند. محدود بودن این خدمت‌دهندگان به ایجاد صف می‌انجامد؛ مثلا، در یك شبکهٔ اتوبوسرانی شهری، خدمت‌دهندگان، اتوبوسها هستند. به‌علت محدودیت تعداد آنها، صف مشتریها، که در اینجا شهروندان‌اند، تشکیل می‌شود. مثال دیگر، تراکم اتومبیلها پشت چراغ قرمز است. در اینجا، اتومبیلها مشتری سیستم و فضای چهار راه خدمت دهنده محسوب می‌شود. مطالعهٔ حمل و نقل و ترافیك از دیدگاههای مختلف، یکی از عمده‌ترین کاربردهای نظریهٔ صف است.

1. Erlang



### ج. فرودگاهها و بنادر

فرودگاهها و بنادر، گرچه جزئی از مجموعهٔ کل حمل و نقل هستند، به‌علت اهمیتی که دارند، در نظریهٔ صف به‌طور جداگانه بررسی می‌شوند. باند فرودگاه را می‌توان یك خدمت‌دهنده به‌حساب آورد. در هر لحظه فقط یك هواپیما (در فرودگاههای بزرگتر چند باند و چند هواپیما) می‌تواند روی باند بنشیند و یا از آن بلند شود. به‌این ترتیب، در فرودگاههای پررفت و آمد، هواپیمایی برای نشستن روی باند ممکن است مدتی (در حال پرواز در بالای فرودگاه) در صف انتظار بماند. عین همین موضوع در بنادر نیز ممکن است اتفاق بیفتد، کشتیها، به علت محدودیت امکانات تخلیه و بارگیری، ممکن است حتی ماهها در انتظار بمانند. در فرودگاهها و بنادر، سیستمهای صفی نیز به‌طور جنبی به‌وجود می‌آیند؛ نظیر: ارائهٔ خدمات به مسافر، بارگیری کامیونها در انبارهای توشه و نظایر آنها.

### د. بیمارستانها و مراکز بهداشتی

می‌توان بیمارستان، یا حتی یك بخش آن را، یك سیستم صف فرض کرد. بیماران، مشتری و امکانات درمان (نظیر اطاق عمل، تزریقات، آزمایشگاه و...)، خدمت‌دهنده محسوب می‌شوند.

### هـ. شبکهٔ پستی کشور

خدمتی که ارائه می‌شود، انتقال نامه و بسته‌های پستی از مبدأ مشخص به مقصد مورد نظر است. در اینجا مشتری، نامه و خدمت‌دهنده، امکانات پست، نظیر نامه‌رسان، وسایل حمل و نقل بسته‌های پستی، و ماشینهای تفکیك نامه محسوب می‌شود.

### و. سیستم تعمیر و نگهداری تأسیسات صنعتی

در این مورد ماشینهایی که خراب می‌شوند، نقش مشتری را دارند، و خدمتی که ارائه می‌شود انواع تعمیرات اضطراری و نگهداریهای برنامه‌ریزی شده است. خدمت‌دهندگان، تعمیرکاران و ابزار تعمیر هستند. برخلاف مثالهای بالا، که در آنها جمعیت مشتریان عملا نامتناهی بود، در این حالت جمعیت مشتریان فقط ماشین‌آلات کارخانه و در نتیجه متناهی است.

### ز. فرایند تولید کارخانجات

در یك خط تولید (مثلا مونتاژ نهایی)، قطعاتی که باید به هم متصل شوند، مشتری، و امکانات تولید، نظیر کارگران و ابزارها، خدمت‌دهنده محسوب می‌شوند. تعادل خط موقعی به‌وجود می‌آید که ورود مشتری به‌سیستم (یعنی حرکت قطعات از یك مرحلهٔ تولید به‌مرحلهٔ بعدی) متناسب با ظرفیت خط مونتاژ باشد؛ در غیر این صورت یا صفی از قطعات به‌وجود

می‌آید، یا امکانات تولید بدون استفاده می‌ماند. در این حالت، برخلاف حالت قبلی، ورود مشتری معمولا به صورت قطعی (یا تقریب کافی) است.

نظریهٔ صف در زمینه‌های دیگر از جمله کامپیوتر، دادگاههای قضایی، ادارات دولتی، سیستم آموزش عالی، سیستمهای خدماتی (مانند پمپ بنزین، باجهٔ فروش بلیط ...) و سیستم مولتی‌پروسسورها کاربردهای گسترده‌ای دارد.

## مسائل

۱. اجزای سیستمهای صف زیر (نوع خدمت، خدمت دهنده، مشتری، صف، و جمعیت مشتریان) را مشخص کنید.

الف. بانک

ب. انبار ابزار کارخانه

ج. مرکز اورژانس شهر

د. خط تحویل هواپیما در سالن کارخانه

هـ. مخزن سد آب

و. خط تولید محصولی با سه نوع عملیات و یک مورد بازرسی در انتهای خط

ز. باجهٔ عوارض در ابتدای بزرگراه

۲. سیستم انبارداری محصولی را در نظر بگیرید، که تعداد موجودی آن محصول به‌اضافه تعدادی که سفارش داده‌شده‌است، همیشه برابر با $N$ باشد. به‌عبارت دیگر، موقعی که یک واحد محصول فروخته می‌شود، بلافاصله برای جایگزینی آن واحدی دیگر از محصول سفارش داده شود. سیستم صفی را برای این مسئله تعریف کنید. خدمت‌دهنده، مشتری، نظم سیستم، زمان بین دو ورود مشتریها، و مدت‌زمان خدمت را مشخص کنید.

۳. پارکینگ اتومبیلی را با ظرفیت معین به‌صورت سیستم در نظر بگیرید، اجزای آن، یعنی نوع خدمت، خدمت‌دهندگان و تعداد آنها، مشتری، جمعیت مشتریان بالقوه، همگن بودن یا نبودن آهنگ ورود مشتری، مدت‌زمان خدمت، آهنگ خدمت‌دهی، و آهنگ خروج مشتری و طول صف را مشخص کنید.

۴. در یک سیستم صف، تعداد مشتریهایی که بین لحظهٔ صفر تا $t$ مراجعه می‌کنند، را با $N(t)$ و زمان ورود مشتری $n$ ام را با $S_n$ بیان می‌کنیم. نشان دهید که

$$P[N(t)=n]=P[S_n\leqslant t \text{ و } S_{n+1}>t]$$

و

$$P[N(t)\geqslant n]=P[S_n\leqslant t]$$

$$P[N(t)=n]=P[S_n\leqslant t]-P[S_{n+1}\leqslant t]$$



# ۲

# مروری بر احتمالات

در این فصل به‌مرور بر بعضی از تعاریف و مفاهیم نظریهٔ احتمال می‌پردازیم. برای بررسی جزئیات و درک عمیقتر مطالب، پیشنهاد می‌کنیم که به کتابهایی که در این زمینه نوشته شده است؛ مثلا، کتابهای شمارهٔ ۵ و ۱۰، در لیست منابع و مآخذ، مراجعه شود.

## ۱.۲ فضای نمونه، پیشامد و احتمال

آزمایش یا تجربه‌ای را در نظر بگیرید که نتیجهٔ آن را نتوان به‌صورت قطعی، از قبل پیش‌بینی کرد؛ زیرا، به‌عامل شانس یا تصادف بستگی دارد. **فضای نمونه** عبارت از مجموعهٔ نتیجه‌هایی است که می‌توان از این آزمایش انتظار داشت.

**مثال ۱.۲** سیستم صفی را در نظر بگیرید که مدت زمان ارائهٔ خدمت در آن عموماً به‌صورت قطعی قابل پیش‌بینی نیست. فرض کنید که تجربه نشان داده است که مدت‌زمان خدمت در این سیستم، بین ۵ تا ۱۰ دقیقه است. در این‌صورت فضای نمونهٔ این آزمایش عبارت است از:

$$S=\{x \mid 5\leqslant x\leqslant 10\}$$

**مثال ۲.۲** یک مشتری وارد یک سیستم صف می‌شود، که حداکثر ظرفیت آن ۱۰ است. این مشتری نمی‌تواند پیش‌بینی کند که هنگام ورودش چند مشتری دیگر هم در سیستم

هستند. باوجود این، چون ظرفیت سیستم ۱۰ است، می‌توان اطمینان‌داشت که در هر لحظه بیش از ۱۰ مشتری در سیستم حضور ندارند. بنابراین، چنانچه نتیجهٔ آزمایش را تعداد مشتریان داخل سیستم تعریف کنیم، فضای نمونه عبارت خواهد بود از:

$$S=\{0, 1, 2, \dots, 10\}$$

بادانستن فضای‌نمونه، اگرچه نمی‌توان نتیجهٔ قطعی آزمایش را پیش‌بینی کرد، اما می‌توان مطمئن بود که نتیجهٔ حاصله‌فقط عنصری ازمجموعهٔ فضای نمونه خواهدبود. هرزیرمجموعهٔ فضای نمونه را یك **پیشامد** می‌نامند. اگر $S$ فضای نمونهٔ یك آزمایش باشد، مجموعهٔ $E$ را در صورتی پیشامد می‌نامیم که

$$E\subset S \qquad (1.2)$$

در مثال ۱.۲، پیشامد می‌تواند مجموعهٔ زیر باشد

$$E=\{x \mid 5\leqslant x\leqslant 6\}$$

در این پیشامد فقط بررسی خدمتهایی که کمتر از ۶ دقیقه طول می‌کشند، مد نظر است.

در مثال ۲.۲، پیشامد می‌تواند مجموعهٔ $E=\{0\}$ باشد، که دراین‌صورت، هنگام ورود مشتری مورد نظر، سیستم خالی است.

**احتمال وقوع یك پیشامد.** در یك آزمایش، که فضای نمونهٔ آن $S$ است، احتمال وقوع پیشامدی مانند $E$، که داخل این فضاست، براساس سه اصل زیر تعریف می‌شود:

$$0\leqslant P(E)\leqslant 1 \qquad (2.2)$$

$$P(S)=1 \qquad (3.2)$$

ج. چنانچه $E_1$ و $E_2$ دو پیشامد فضای $S$ باشد و فصل مشترکی هم نداشته باشند (یعنی $E_1E_2=\phi$)

$$P(E_1\bigcup E_2)=P(E_1)+P(E_2) \qquad (4.2)$$

طبق این اصل، احتمال اینکه نتیجهٔ آزمایش حداقل یکی از دو پیشامد فوق باشد، برابر با مجموع احتمالات آنهاست.

**چند نتیجه‌گیری**

با استفاده از سه‌اصل فوق می‌توان نتیجه‌گیریهای‌زیر را ارائه‌کرد، که درمحاسبهٔ‌احتمالات پیشامدها مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۱.

$$P(E^c)=1-P(E) \qquad (5.2)$$



که $E^c$ **مکمل** مجموعهٔ $E$ است، یعنی

$$E\cdot E^c=\varnothing, \quad E\bigcup E^c=S$$

۲. اگر $E_1\subset E_2$ باشد

$$P(E_1)\leqslant P(E_2) \qquad (6.2)$$

۳. دو مجموعهٔ $E_1$ و $E_2$، که اشتراك آنها لزوماً مجموعهٔ تهی نیست، را در نظر بگیرید

$$P(E_1\bigcup E_2)=P(E_1)+P(E_2)-P(E_1E_2) \qquad (7.2)$$

۴. فضای نمونهٔ $S$، که دارای $N$ عنصر است، را در نظر بگیرید، یعنی

$$S=\{1, 2, \dots, N\}$$

چنانچه نتیجهٔ آزمایش بتواند هرکدام از عناصر فوق، با شانس مساوی، باشد

$$P(1)=P(2)=\dots=P(N)=\frac{1}{N} \qquad (8.2)$$

## ۲.۲ متغیر تصادفی

در اکثر موارد به‌جای بررسی پیشامدها به‌طور مستقیم، از مفهوم **متغیر تصادفی** برای بررسی پدیده‌های احتمالی‌استفاده می‌کنند. این‌کار باعث تسهیل‌محاسبات می‌شود. برحسب تعریف، متغیر تصادفی عبارت از تابعی عددی است که روی فضای نمونه تعریف می‌شود. به‌این ترتیب، به هر عنصر فضای نمونه، عددی اختصاص داده می‌شود. بدیهی است که می‌توان متغیرهای تصادفی متعددی را روی یك فضای نمونهٔ مشخص تعریف کرد.

در مثال ۲.۲ می‌توان متغیرهای تصادفی $X$ و $Y$ را به‌شرح زیر تعریف کرد:

$X$ عبارت است از مدت زمان ارائه خدمت. این متغیر تصادفی می‌تواند همهٔ اعداد بین ۵ تا ۱۰ را انتخاب کند و $Y$ چنین تعریف می‌شود

$$Y=\begin{cases}0 & \text{اگر مدت زمان خدمت کمتر از ۶ دقیقه باشد،}\\ 1 & \text{اگر مدت زمان خدمت بیش‌از ۶ دقیقه باشد،}\end{cases}$$

این متغیر تصادفی فقط می‌تواند مقادیر صفر و یك را انتخاب کند. همان‌طورکه مشاهده می‌شود، با وجود اینکه در آزمایش مورد نظر فقط یك فضای نمونه وجود دارد، متغیرهای تصادفی مختلف روی آن تعریف شده است. معمولاً متغیر تصادفی طوری تعریف می‌شود که راحت‌تر بتوان هدف مورد نظر را بیان‌کرد. دراین‌مثال، اگر فقط زمان ارائه‌خدمت

مد نظر باشد، تعریف $X$ مناسب است. چنانچه فرض شود که اگر مدت خدمت بیش‌از ۶ دقیقه طول بکشد جریمه‌ای بـه آن تعلق می‌گیرد، تنها طبقه‌بندی کـه می‌تواند مدنظر باشد این است که خدمتها یا مشمول جریمه می‌شود (یعنی بیشتر از ۶ دقیقه طول می‌کشد)، و یا نمی‌شود (کمتر یا مساوی ۶ دقیقه طول می‌کشد). در این حالت، فرضاً بین زمان خدمت ۷ دقیقه‌ای و ۸ دقیقه‌ای تفاوتی وجود ندارد.

از طرف دیگر، هر پیشامد را نیز می‌توان برحسب متغیر تصادفی به‌شکل $(X=x)$ یا $(X\leqslant x)$ بیان کرد.

تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی $X$ (که بـه‌اختصار آنرا تابع توزیع می‌نامند)، به‌ازای تمام مقادیر $x$ (از $-\infty$ تا $+\infty$) به‌شرح زیر تعریف می‌شود.

$$F(x)=P(X\leqslant x) \qquad (۹.۲)$$

براساس این تعریف، می‌توان نتیجه‌گیری کرد کـه تابع توزیع متغیر تصادفی $X$ دارای خواص زیر نیز هست:

الف. تابع توزیع تابعی افزاینده است. اگر $a\leqslant b$ باشد

$$F(a)\leqslant F(b) \qquad (۱۰.۲)$$

ب. مقدار تابع توزیع در $-\infty$ صفر است و در $+\infty$ به‌سمت یك میل می‌کند، یعنی

$$\lim_{x\to-\infty} F(x)=0, \quad \lim_{x\to+\infty} F(x)=1 \qquad (۱۱.۲)$$

ج. رابطهٔ زیر به‌ازای همهٔ مقادیر $a\leqslant b$ همواره برقرار است،

$$P(a<x\leqslant b)=F(b)-F(a)$$

د. چنانچه در نقطه‌ای مانند $x$ تابع توزیع منقطع باشد،

$$F(x)=\lim_{y\to 0} F(x+y) \qquad (۱۲.۲)$$

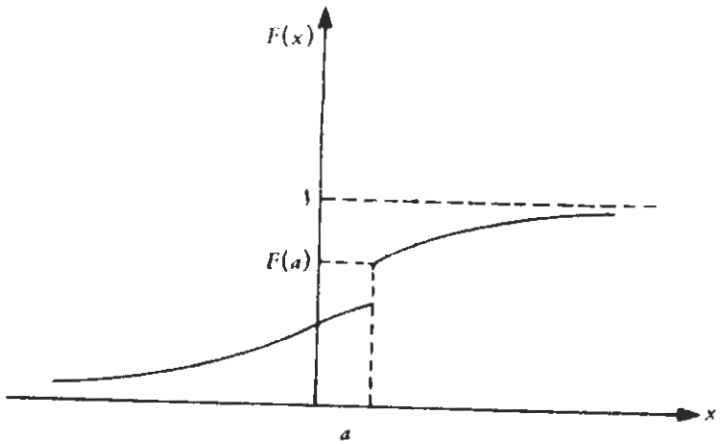
و

$$\lim_{y\to 0} F(x-y)<F(x) \qquad (۱۳.۲)$$

یعنی در چنین نقطه‌ای مقدار تابع از شاخهٔ سمت راست منحنی تابع بـه دست می‌آید و با توجه به‌خاصیت افزاینده بودن تابع، این‌مقدار از مقادیر شاخهٔ سمت چپ بیشتر است. به‌عبارت دیگر $F(x)$ تابعی است که از سمت راست پیوسته است. شکل ۱.۲ این موضوع را نشان می‌دهد.

متغیر تصادفی بر دو نوع است. گسسته و پیوسته.






**شکل ۱.۲** خاصیت پیوستگی از سمت راست در یك تابع توزیع

**الف. متغیر تصادفی گسسته**

چنانچه متغیری تصادفی فقط مقادیر یك **مجموعهٔ قابل شمارش** را انتخاب کند، به‌آن **متغیر تصادفی گسسته** می‌گویند. تعداد عناصر این مجموعه می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد. برحسب تعریف، **تابع احتمال** این متغیر تصادفی عبارت است از:

$$p(a)=P(X=a) \qquad (۱۲.۲)$$

که $a$ یکی از عناصر مجموعهٔ قابل شمارش فوق است. مجموع احتمالات، به‌ازای تمام عناصر این مجموعه برابر با یك است، یعنی

$$\sum_{a=-\infty}^{+\infty} p(a)=1 \qquad (۱۵.۲)$$

در عمل، گاهی استفاده از مفهوم تابع توزیع یك متغیر تصادفی راحت‌تر ازمفهوم تابع احتمال است. تابع توزیع را می‌توان برحسب تابع احتمال، به‌شرح زیر بیان کرد.

$$F(x)=P(X\leqslant x)=\sum_{a=-\infty}^{x} p(a) \qquad (۱۶.۲)$$

**مثال ۳.۲** یك متغیر تصادفی دارای تابع احتمالی به‌شرح زیر است:

$p(0)=0.2$ $\quad p(1)=0.1,$ $\quad p(2)=0.1,$ $\quad p(3)=0.2,$
$p(5)=0.3,$ $\quad p(6)=0.1$

تابع توزیع این متغیر تصادفی را تعیین کنید.

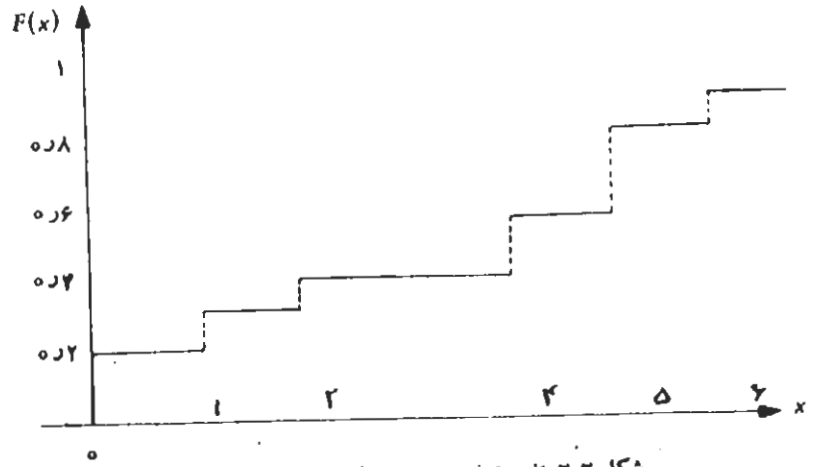
حل: طبق تعریف، تابع توزیع این متغیر تصادفی را به‌شرح زیرمی‌توان بیان کرد:

$$F(x)=\begin{cases} ۰ & x<۰ \\ ۰٫۲ & ۰\leqslant x<۱ \\ ۰٫۳ & ۱\leqslant x<۲ \\ ۰٫۴ & ۲\leqslant x<۴ \\ ۰٫۶ & ۴\leqslant x<۵ \\ ۰٫۹ & ۵\leqslant x<۶ \\ ۱ & ۶\leqslant x \end{cases}$$

منحنی $F(x)$ نسبت به $x$ در شکل ۲.۲ نشان داده شده است. از طرف دیگر، با معلوم بودن تابع توزیع یک متغیر تصادفی گسسته، می‌توان تابع احتمال آن را تعیین کرد. در این مورد، مقدار تابع احتمال در همهٔ نقاط برابر با صفر است، به‌استثنای نقاطی که در آنها تابع توزیع دارای جهش است. در چنین نقاطی مقدار تابع احتمال برابر با مقدار جهش است. با مراجعه به شکل فوق، صحت این امر روشن می‌شود.

تعدادی از توابع توزیع اهمیت خاصی دارند که مهمترین آنها عبارت‌اند از:

**توزیع برنولی.** برحسب تعریف، هر متغیر تصادفی که فقط بتواند دو مقدار مشخص را انتخاب کند، دارای تابع توزیع برنولی است. به‌عنوان نمونه، آزمایشی را در نظر بگیرید که نتیجه آن صرفاً موفقیت یا شکست باشد. بر این اساس، متغیری تصادفی را می‌توان تعریف کرد که فقط مقادیر یک و صفر را انتخاب کند، به‌ترتیب، معرف موفقیت و شکست آزمایش هستند. چنانچه $p$ احتمال موفقیت و $(۱-p)$ احتمال شکست آزمایش باشد،




**شکل ۲.۲** تابع توزیع متغیر تصادفی در مثال ۲.۳



تابع احتمال این متغیر تصادفی عبارت است از:

$$p(۱)=p, \quad p(۰)=۱-p \qquad (۱۷.۲)$$

**توزیع دوجمله‌ای.** فرض کنید که $n$ آزمایش برنولی (با نتایج موفقیت یا شکست) مستقلاً انجام شود. تعداد موفقیتهای این مجموعه آزمایشها، متغیری تصادفی با توزیع دوجمله‌ای، به‌شرح زیر است

$$p(x)=\binom{n}{x}p^x(۱-p)^{n-x} \quad , \quad x=۰, ۱, \cdots, n \qquad (۱۸.۲)$$

که $p$ احتمال موفقیت هر آزمایش برنولی است.

**توزیع هندسی.** در این مورد نیز فرض کنید که تعدادی آزمایش برنولی مستقلاً انجام شود. چنانچه $X$ را تعداد آزمایشها تا اولین موفقیت در نظر بگیریم، $X$ متغیری تصادفی با توزیع هندسی به‌شرح زیر است.

$$p(x)=p(۱-p)^{x-۱} \quad , \quad x=۱, ۲, \cdots \qquad (۱۹.۲)$$

**توزیع پواسون.** متغیر تصادفی $x$ دارای توزیع پواسون با پارامتر $\lambda$ است. اگر

$$p(x)=e^{-\lambda}\frac{(\lambda)^x}{x!} \quad , \quad x=۰, ۱, ۲, ۳, \cdots \qquad (۲۰.۲)$$

به‌علت اهمیت توزیع پواسون در نظریهٔ صف، دربارهٔ آن به‌تفصیل در فصل سوم بحث خواهیم کرد.

### ب. متغیر تصادفی پیوسته

چنانچه متغیری تصادفی بتواند همهٔ مقادیر یک مجموعهٔ غیرقابل شمارش (پیوسته) را انتخاب کند، به‌آن متغیر تصادفی پیوسته می‌گویند. مثلاً، مدت زمان ارائه خدمت در یک سیستم صف معمولاً یک متغیر تصادفی پیوسته است. هر متغیر تصادفی پیوسته با تابع توزیع آن، یعنی $F(x)$ مشخص می‌شود. در مقایسه با تابع احتمال در مورد متغیرهای تصادفی گسسته، **تابع چگالی** در مورد متغیرهای تصادفی پیوسته به‌شرح زیر تعریف می‌شود.

$$f(x)=\frac{d}{dx}F(x) \qquad (۲۱.۲)$$

متقابلاً، تابع توزیع یک متغیر تصادفی پیوسته برحسب **تابع چگالی** آن از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.

$$F(x)=P(X\leqslant x)=\int_{-\infty}^{x} f(y)dy \qquad (۲۲.۲)$$

احتمال وقوع یك پیشامد را می‌توان با استفاده از تابع توزیع یا تابع چگالی متغیر تصادفی پیوسته به‌دست آورد.

$$P(a<X\leqslant b)=F(b)-F(a)=\int_{a}^{b} f(y)dy \qquad (۲۳.۲)$$

در واقع، احتمال اینکه مقدار متغیر تصادفی بین دو عدد $a$ و $b$ باشد، برابر با مساحت زیر منحنی تابع چگالی در همین فاصله است (شکل ۳.۲). از طرف دیگر، طبق رابطهٔ (۲۳.۲)، احتمال اینکه یك متغیر تصادفی پیوسته، دقیقاً مقدار مشخصی مانند $a$ را انتخاب کند، برابر با صفر است، یعنی

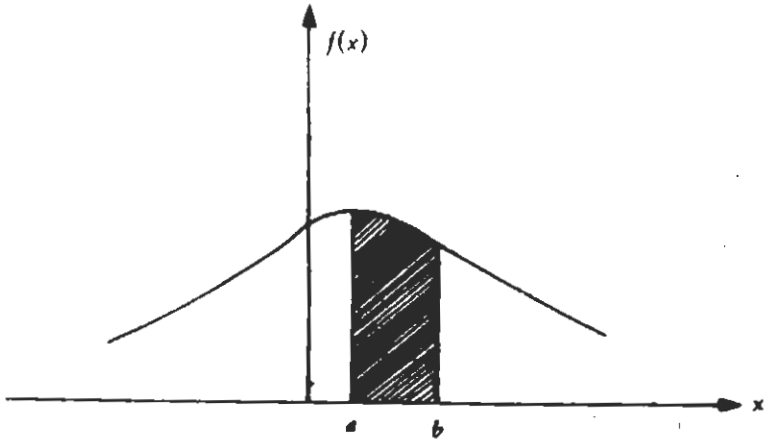
$$P(X=a)=\int_{a}^{a} f(x)dx=0 \qquad (۲۴.۲)$$

در نتیجه، می‌توان نشان داد که

$$P(X<a)=P(X\leqslant a) \qquad (۲۵.۲)$$

ضمناً، با توجه به‌رابطه‌های (۱۱.۲) و (۲۳.۲)، مساحت زیر منحنی تابع چگالی برابر با یك خواهد بود، یعنی

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1 \qquad (۲۶.۲)$$




**شکل ۳.۲** تابع چگالی یك متغیر تصادفی پیوسته



درمورد متغیرهای تصادفی پیوسته نیز تعدادی از آنها از اهمیت بیشتری برخوردارهستند، که عبارت‌اند از: **توزیع نمایی؛ توزیع گاما؛ توزیع ارلانگی؛ توزیع فوق‌نمایی؛ توزیع نرمال.**

سه نوع توزیع اول را به تفصیل در فصل سوم مورد بررسی قرار خواهیم داد. برای مطالعهٔ بیشتردرمورد توابع‌توزیع‌فوق نمایی‌ونرمال به‌مراجع ۵ و ۱۰ مراجعه‌شود.

## ۳.۲ امید ریاضی

امید ریاضی یك متغیر تصادفی گسسته مانند $X$، که با $E(X)$ نشان داده می‌شود، برحسب تعریف، عبارت است از:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i)=E[X] \qquad (۲۷.۲)$$

که $X_i$ها مقادیر ممکنی هستند که متغیر تصادفی می‌تواند انتخاب کند. چنانچه متغیر تصادفی پیوسته باشد، امید ریاضی آن، از رابطهٔ زیر حاصل می‌شود.

$$E[X]=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \qquad (۲۸.۲)$$

**قضیهٔ ۱.۲:** به‌ازای تمام اعداد ثابت $a$ و $b$، رابطه‌های زیر صادق است.

$$E(aX+b)=aE(X)+b \qquad (۲۹.۲)$$

$$E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y) \qquad (۳۰.۲)$$

### امید ریاضی تابعی از متغیر تصادفی

در مواردی، ممکن است به‌جای محاسبهٔ امید ریاضی متغیر تصادفی، امید ریاضی تابعی چون $g$ از آن مد نظر باشد، که دراین حالت، طبق تعریف، از رابطه‌های زیر به‌دست می‌آید:

$$E[g(X)]=\sum_{x} g(x)p(x) \quad , \quad \text{اگر } X \text{ گسسته باشد} \qquad (۳۱.۲)$$

$$E[g(X)]=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx \quad , \quad \text{اگر } X \text{ پیوسته باشد} \qquad (۳۲.۲)$$

حالت خاصی که کاربردهای متعدد دارد، محاسبهٔ **گشتاور $n$ام** یك متغیر تصادفی، به‌شکل $E(X^n)$ به‌ازای $n=1,2,\ldots$ است. (گشتاور اول، همان میانگین متغیر تصادفی است).

### واریانس متغیر تصادفی

واریانس یك متغیر تصادفی، به‌شرح زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{var}(X)=E[(X-E[X])^2] \qquad (۳۳.۲)$$

واریانس شاخصی است که پراکندگی مقادیر متغیر تصادفی را نسبت به‌میانگین آن می‌سنجد. می‌توان نشان داد که چگونه واریانس را می‌شود از رابطه زیر به‌دست آورد.

$$\mathrm{var}(X)=E[X^2]-(E[X])^2 \qquad (۳۴.۲)$$

## ۴.۲ تابع توزیع توأم

دو متغیر تصادفی $X$ و $Y$ را درنظر بگیرید، که **تابع توزیع توأم** آنها به‌شرح زیر تعریف می‌شود.

$$F(x, y)=P(X\leqslant x,\ Y\leqslant y) \qquad (۳۵.۲)$$

در عبارت فوق احتمال اینکه هردوپیشامد اتفاق بیفتد، مدنظر است.

تابع توزیع هر کدام از این متغیرهای تصادفی را می‌توان از تابع توزیع توأمشان به‌دست آورد. برای این منظور با تخصیص همهٔ مقادیرممکن به‌متغیر تصادفی دیگر، آن را بی‌اثر می‌سازیم. بدین ترتیب،

$$F_X(x)=P[X\leqslant x,\ Y<\infty]=\lim_{y\to\infty}F(x, y)=F(x, \infty) \qquad (۳۶.۲)$$

در عبارت فوق، $F_X(x)$ معرف تابع توزیع $X$، به‌تنهایی، است و **توزیع نهایی** نامیده می‌شود.

چنانچه دو متغیر تصادفی مورد نظر پیوسته باشد، یك تابع چگالی توأم، مانند $f(x, y)$ رابطهٔ آنها را مشخص می‌سازد. در این‌صورت، احتمال اینکه مقادیر این دو متغیر از مجموعهٔ مشخصی انتخاب شود، از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود.

$$P\{(X, Y)\in C\}=\iint_{(x,y)\in C} f(x, y)\,dx\,dy \qquad (۳۷.۲)$$

در این حالت، تابع توزیع توأم آنها نیز به‌همین صورت به‌دست می‌آید.

$$F(a, b)=P(X\leqslant a,\ Y\leqslant b) \qquad (۳۸.۲)$$

از طرف دیگر، تابع چگالی توأم را نیز می‌توان از تابع توزیع توأم به‌دست آورد.



$$f(a, b)=\frac{\partial^2}{\partial a\partial b}F(a, b) \qquad (۳۹.۲)$$

با استفاده از تابع چگالی توأم، می‌توان تابع چگالی هر متغیر تصادفی را جداگانه محاسبه کرد

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dy \qquad (۴۰.۲)$$

**مثال ۴.۲** دو متغیر تصادفی $X$ و $Y$ را، که تابع چگالی توأم آنها به‌شرح زیر است، درنظر بگیرید. $F_Y(y)$ را محاسبه کنید.

حل:

$$f(x, y)=\begin{cases}4y(x-y)e^{-(x+y)} & , \quad 0<x<\infty,\ 0\leqslant y\leqslant x\\ 0 & , \quad \text{درغیراین‌صورت}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx=\int_{-\infty}^{y} f(x, y)\,dx+\int_{y}^{\infty} f(x, y)\,dx$$

در انتگرال اول عبارت فوق، چون مقدار $x$ از $y$ کوچکتر است، تابع چگالی توأم و در نتیجه مقدار انتگرال برابر با صفر است. پس‌از انتگرالگیری جزء به‌جزء قسمت دوم، نتیجهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$f_Y(y)=4y$$

### پیشامدها و متغیرهای تصادفی مستقل

دو پیشامد $E_1$ و $E_2$ را مستقل می‌نامند، اگر رابطهٔ زیر در مورد آنها صدق کند.

$$P(E_1E_2)=P(E_1)P(E_2) \qquad (۴۱.۲)$$

به‌همین‌ترتیب، دومتغیر تصادفی $X$ و $Y$ درصورتی مستقل هستند که به‌ازای همهٔ مجموعه‌های عددی $A$ و $B$ رابطهٔ زیر صادق باشد:

$$P\{X\in A,\ Y\in B\}=P\{X\in A\}P\{Y\in B\} \qquad (۴۲.۲)$$

بنابراین، از رابطهٔ فوق نتیجه می‌شود که به‌ازای تمام مقادیر عددی $x$ و $y$ خواهیم‌داشت.

$$F(x, y)=F_X(x)F_Y(y) \qquad (۴۳.۲)$$

$$P(x, y)=P_X(x)P_Y(y) \qquad (۴۴.۲)$$

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y) \quad (۲۵.۲)$$

و

$$E(XY) = E(X)E(Y) \quad (۲۶.۲)$$

**کوواریانس دو متغیر تصادفی**

کوواریانس دو متغیر تصادفی $X$ و $Y$ را به‌شرح زیر تعریف می‌کنیم.

$$\operatorname{cov}(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] \quad (۲۷.۲)$$

رابطهٔ فوق را به‌شکل زیر نیز می‌توان بیان کرد:

$$\operatorname{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) \quad (۲۸.۲)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، در مورد دو متغیر تصادفی مستقل، مقدار کوواریانس برابر با صفر است.

**واریانس مجموع دو متغیر تصادفی**

**قضیه ۲.۲** رابطهٔ زیر همیشه صدق می‌کند.

$$\operatorname{var}(X+Y) = \operatorname{var}(X) + \operatorname{var}(Y) + 2\operatorname{cov}(X, Y) \quad (۲۹.۲)$$

چنانچه دو متغیر تصادفی $X$ و $Y$ مستقل باشند، واریانس مجموع آنها برابر با مجموع واریانس‌های آنهاست.

## ۵.۲ احتمال شرطی

منظور از احتمال شرطی یک پیشامد، مثلا $P(E|F)$، احتمال اتفاق افتادن پیشامد $E$ است، مشروط براینکه پیشامد $F$ اتفاق افتاده باشد. بدین‌ترتیب، با درنظر گرفتن اطلاعات جدیدی که در مورد اتفاق افتادن پیشامد $F$ داریم، و همچنین رابطهٔ بین $E$ و $F$، قضاوت بهتری در بارهٔ احتمال اتفاق افتادن یا نیفتادن پیشامد $E$ خواهیم داشت.

احتمال شرطی با استفاده از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$P(E|F) = \frac{P(EF)}{P(F)} \quad (۵۰.۲)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، چنانچه دو پیشامد فوق مستقل باشند، طبق رابطهٔ (۲۱.۲) نتیجهٔ عبارت فوق $P(E)$ خواهد بود. یعنی، پیشامد $F$ تأثیری بر روی $E$ نخواهد داشت.



**مثال ۵.۲** فرض کنید سه سکه را پرتاب می‌کنیم. احتمال پیشامد $E$، آمدن حداقل ۲ شیر در سه پرتاب، را در حالتهای زیر محاسبه کنید.

الف. بدون هیچ اطلاعات اضافی: در این حالت فضای نمونه دارای هشت عنصر است، که در چهار عنصر آن حداقل دو شیر وجود دارد. لذا

$$P(E) = ۰٫۵$$

ب. با اطلاع از اینکه نتیجهٔ اولین پرتاب، شیر بوده است: این پیشامد، یعنی شیر بودن نتیجه اولین پرتاب، را با $F$ نشان می‌دهیم. بنابراین، هدف، محاسبهٔ $P(E|F)$ است. این عبارت را می‌توانیم مستقیماً و یا با استفاده از رابطهٔ (۵۰.۲) به‌دست آوریم. محاسبهٔ مستقیم به‌شرح زیر انجام می‌شود.

$$P(E|F) = P(\text{یک یا دو شیر آمدن نتیجه در دو آزمایش باقیمانده})$$

$$= ۱ - P(\text{خط آمدن نتیجه در هر دو آزمایش باقیمانده})$$

$$= ۱ - ۰٫۲۵ = ۰٫۷۵$$

چنانچه بخواهیم از رابطه (۴۸.۲) استفاده کنیم، خواهیم داشت.

$$P(EF) = P(\text{آمدن حداقل دو شیر در پرتاب اول})$$

$$= P(\text{شیر آمدن نتیجهٔ اولین پرتاب به‌اضافهٔ شیر آمدن نتیجهٔ حداقل یکی از دو پرتاب دیگر})$$

$$= \frac{۳}{۸}$$

و

$$P(F) = P(\text{شیر آمدن نتیجهٔ اولین پرتاب})$$

$$= ۰٫۵$$

لذا طبق رابطهٔ (۵۰.۲)

$$P(E|F) = ۰٫۷۵$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، در دو حالت فوق، الف و ب، اگرچه یک پدیدهٔ مشخص و منحصر به‌فرد (به‌دست آمدن حداقل دو شیر در سه پرتاب) مورد بررسی قرار گرفته است، چون اطلاعات موجود در این دو حالت متفاوت است، نتایج به‌دست آمده نیز یکسان نیست.

**مثال ۶.۲** دو مشتری وارد یک سیستم شده‌اند. به فرض اینکه هر مشتری به‌احتمال ۰٫۶ مرد باشد، احتمال مرد بودن هر دو مشتری، پیشامد $E$، را در سه حالت زیر حساب کنید.

**الف. بدون هیچ اطلاعات اضافی**

$$P(E)=(۰٫۶)(۰٫۶)=۰٫۳۶$$

ب. با دانستن اینکه اولین مشتری مرد است (پیشامد $F$)

$$P(E|F)=\frac{P(EF)}{P(F)}$$

$P(EF)=P$(مرد بودن هر دو مشتری و همچنین مرد بودن اولین مشتری)

$P$(مرد بودن هر دو مشتری)$=۰٫۳۶$

و

$$P(F)=۰٫۶$$

در نتیجه

$$P(E|F)=۰٫۶$$

ج. با دانستن اینکه حداقل یکی از دو مشتری مرد است (پیشامد $G$)

$$P(E|G)=\frac{P(EG)}{P(G)}$$

$$P(EG)=۰٫۳۶$$

$P(G)=۱-P$(زن بودن هر دو مشتری)$=۱-۰٫۱۶=۰٫۸۴$

در نتیجه

$$P(E|G)=\frac{۰٫۳۶}{۰٫۸۴}=\frac{۳}{۷}=۰٫۴۳$$

درصورتی که پیشامدها برحسب متغیر تصادفی بیان شده باشند، رابطه (۵۰.۲) همچنان معتبر است و به‌یکی از شکلهای زیر بیان می‌شود:

$$P(X=x|Y=y)=\frac{P(X=x,\ Y=y)}{P(Y=y)} \qquad (۵۱.۲)$$

$$P(X\leqslant x|Y=y)=\frac{P(X\leqslant x,\ Y=y)}{P(Y=y)} \qquad (۵۲.۲)$$

(مشروط براینکه در دو عبارت فوق مخرج کسر برابر با صفر نباشد)

**مثال ۷.۲** تعداد مشتریانی که در ساعت اول وارد سیستمی می‌شوند را با $X$ و تعداد



آنهایی را که در دومین ساعت وارد می‌شوند با $Y$ نشان می‌دهیم. فرض می‌کنیم که این‌دو متغیر تصادفی دارای توزیع پواسون و با پارامترهای $\lambda_1$ و $\lambda_2$ هستند. تابع توزیع $X$ را با آگاهی از اینکه $X+Y=n$ است، حساب کنید.

حل: با استفاده از رابطهٔ (۴.۲) و با توجه به‌اینکه $X$ و $Y$ مستقل هستند، داریم

$$P\{X=k|X+Y=n\}=\frac{P\{X=k,\ X+Y=n\}}{P\{X+Y=n\}}$$

$$=\frac{P\{X=k,\ Y=n-k\}}{P\{X+Y=n\}}$$

$$=\frac{P\{X=k\}P\{Y=n-k\}}{P\{X+Y=n\}}$$

از طرفی می‌دانیم که مجموع دومتغیر تصادفی با توزیع‌پواسون نیز دارای توزیع‌پواسون (با پارامتری برابر با مجموع پارامترها) خواهد بود. بنابراین

$$P\{X=k|X+Y=n\}=\frac{e^{-\lambda_1}\lambda_1^k}{k!}\ \frac{e^{-\lambda_2}\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}\left[\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}\right]^{-1}$$

$$=\frac{n!}{(n-k)!k!}\ \frac{\lambda_1^k\lambda_2^{n-k}}{(\lambda_1+\lambda_2)^n}$$

$$=\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k}$$

بدین ترتیب، متغیر تصادفی $X$، با معلوم بودن $X+Y=n$، دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای $n$ و $\lambda_1/(\lambda_1+\lambda_2)$ خواهد بود.

## ۶.۲ امید شرطی

امید ریاضی $X$، مشروط براینکه متغیر تصادفی دیگری مانند $Y$ مقدار مشخصی مانند $y$ را انتخاب کند، به‌شکل $E(X|Y=y)$ نشان داده می‌شود. درحالتی که $Y$ گسسته باشد، امید شرطی را می‌توان نظیر هر متغیر تصادفی دیگر، به‌شرح زیر محاسبه کرد:

$$E(X|Y=y)=\sum_x xP(X=x|Y=y) \qquad (۵۳.۲)$$

درحالتی که $Y$ پیوسته باشد، امید شرطی را می‌توان از رابطهٔ زیر به‌دست آورد.

۱۸

$$E(X|Y=y)=\frac{\int_{-\infty}^{\infty} x f(x,y)\,dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx} \qquad (۵۴.۲)$$

**مثال ۷.۲** در مثال (۴.۲)، امید شرطی $E(X|Y=y)$ را محاسبه کنید.

**حل:** پس از انتگرالگیری صورت کسر به‌صورت جزء به‌جزء و با استفاده از نتیجهٔ مثال فوق، تساوی زیر به‌دست می‌آید.

$$E(X|Y=y)=y+۲$$

## ۷.۲ به‌کارگیری احتمال شرطی در محاسبهٔ امید ریاضی یک متغیر تصادفی

اگر محاسبهٔ $E(X)$ به‌طور مستقیم امکانپذیر نباشد، می‌توان با استفاده از یک متغیر تصادفی دیگر مانند $Y$ و به‌کمک قضیهٔ زیر چنین محاسبه‌ای را انجام داد.

**قضیه ۳.۲** رابطه‌های زیر همواره برقرار است:

$$E[X]=\sum_y E\{X|Y=y\}P\{Y=y\}, \quad \text{الف. اگر } Y \text{ گسسته باشد،} \qquad (۵۵.۲)$$

$$E[X]=\int_{-\infty}^{\infty} E[X|Y=y]f_Y(y)\,dy, \quad \text{ب. اگر } Y \text{ پیوسته باشد،} \qquad (۵۶.۲)$$

**اثبات:** $X$ و $Y$ می‌توانند پیوسته یا گسسته باشند. در نتیجه، چهار حالت مختلف ممکن است اتفاق بیفتد. برای نمونه، حالتی را درنظر بگیرید که هردو متغیر تصادفی $X$ و $Y$ گسسته باشد. در این‌صورت، رابطهٔ فوق به‌شکل زیر اثبات می‌شود:

$$\begin{aligned}
\sum_y E[X|Y=y]P\{Y=y\} &= \sum_y\sum_x xP\{X=x|Y=y\}P\{Y=y\}\\
&= \sum_y\sum_x x\,\frac{P\{X=x,Y=y\}}{P\{Y=y\}}P\{Y=y\}\\
&= \sum_y\sum_x xP\{X=x,Y=y\}\\
&= \sum_x x\sum_y P\{X=x,Y=y\}\\
&= \sum_x xP\{X=x\}\\
&= E[X].
\end{aligned}$$



همان‌طور که مشاهده می‌شود، برای اینکه بتوان از قضیهٔ فوق جهت محاسبهٔ $E(X)$ استفاده کرد، لازم است که بتوان متغیر تصادفی جدیدی مانند $Y$ پیدا کرد، که، اولاً تابع توزیع آن و، ثانیاً رابطهٔ وابستگی بین $X$ و $Y$، یعنی $E(X|Y=y)$، مشخص باشد.

**مثال ۸.۲** سکه‌ای را در نظر بگیرید، که احتمال آمدن شیر در موقع پرتاب آن $p$ فرض می‌شود. این سکه را آن‌قدر پرتاب می‌کنیم تا اولین شیر به‌دست آید. اگر $N$ معرف تعداد پرتابهای سکه تا اولین شیر باشد، $E(N)$ را حساب کنید.

**حل:** از رابطهٔ (۶.۲) برای محاسبهٔ $E(N)$ استفاده می‌کنیم. برای این منظور باید متغیر جدیدی معرفی کرد، که هم تابع توزیع آن وهم چگونگی رابطهٔ آن با متغیر تصادفی مورد نظر، یعنی $N$، معلوم باشد. این متغیر تصادفی جدید، نتیجهٔ اولین پرتاب، به‌شرح زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$Y=\begin{cases} ۱ & \text{اگر نتیجهٔ اولین پرتاب شیر باشد،}\\ ۰ & \text{اگر نتیجهٔ اولین پرتاب خط باشد،}\end{cases}$$

بنابراین، طبق رابطهٔ (۵۵.۲) و با درنظر گرفتن اینکه احتمال آمدن شیر در هر پرتاب $p$ باشد، داریم:

$$\begin{aligned}
E(N) &= E(N|Y=۱)P(Y=۱)+E(N|Y=۰)P(Y=۰)\\
&= pE(N|Y=۱)+(۱-p)E(N|y=۰)
\end{aligned}$$

بدیهی است که

$$E(N|Y=۱)=۱$$

حال فرض کنید که نتیجهٔ اولین پرتاب شیر نباشد، یعنی $Y=۰$ باشد. در این‌صورت، با توجه به اینکه پرتابها مستقل از یکدیگرند، میانگین تعداد پرتابهای لازم بعد از اولین پرتاب، برابر با $E(N)$ خواهد بود، یعنی

$$E(N|Y=۰)=۱+E(N)$$

در نتیجه

$$E(N)=p+(۱-p)[۱+E(N)]$$

یا

$$E(N)=\frac{۱}{p}$$

## ۸.۲ کاربرد احتمال شرطی در محاسبهٔ احتمال یک پیشامد

چنانچه محاسبهٔ مستقیم یک پیشامد دشوار یا غیر ممکن باشد، می‌توان با استفاده از رابطه‌های احتمال شرطی، شبیه رابطه‌های مربوط به امید شرطی، و طبق قضیهٔ زیر چنین محاسبه‌ای را انجام داد.

**قضیهٔ ۴.۲** رابطه‌های زیر همواره برقرار است:

الف. اگر $Y$ گسسته باشد،
$$P(A)=\sum_{y} P(A|Y=y)P(Y=y) \qquad (۵۷.۲)$$

ب. اگر $Y$ پیوسته باشد،
$$P(A)=\int_{-\infty}^{\infty} P(A|Y=y)f(y)\,dy \qquad (۵۸.۲)$$

**اثبات:** متغیر تصادفی $X$ را به‌شرح زیر تعریف می‌کنیم:

$$X=\begin{cases} ۱ & \text{اگر } A \text{ اتفاق بیفتد،} \\ ۰ & \text{اگر } A \text{ اتفاق نیفتد،} \end{cases}$$

بدیهی است که طبق تعریف میانگین متغیر تصادفی، میانگین $X$ عبارت است از:

$$E(X)=P(A)$$

از طرف دیگر، طبق تعریف امید شرطی داریم:

$$E(X|Y=y)=\sum_{x} xP(X=x|Y=y)=P(X=۱|Y=y)=P(A|Y=y) \qquad (۵۹.۲)$$

با استفاده از رابطه‌های (۵۹.۲) و (۵۵.۲)، این قضیه به‌شرح زیر ثابت می‌شود:

$$P(A)=E(X)=\sum_{y} E(X|Y=y)P(Y=y)=\sum_{y} P(A|Y=y)P(Y=y)$$

**مثال ۹.۲** تعداد مشتریهایی که هر روز به یک سیستم مراجعه می‌کنند، متغیر تصادفی با توزیع پواسون و میانگین آن ۱۰ مشتری در روز است. هر مشتری با احتمال ۰٫۶ و مستقل از سایر مشتریها، از دریافت خدمت منصرف، و از سیستم خارج می‌شود. احتمال اینکه در یک روز مشخص ۱۵ مشتری برای دریافت خدمت بمانند، چیست؟

حل: تعداد مشتریهایی که برای دریافت خدمت می‌مانند را $X$ می‌نامیم. بنابراین، سؤال مسئله، محاسبهٔ $P(X=۱۵)$ است. به جای محاسبهٔ مستقیم، از احتمال شرطی، یعنی رابطهٔ (۵۷.۲)، استفاده می‌کنیم. برای این منظور، از متغیر تصادفی $N$، تعداد مشتریهایی که در روز مراجعه می‌کنند، کمک گرفته می‌شود. به‌این ترتیب،

$$P(X=۱۵)=\sum_{n=۱۵}^{\infty} P(X=۱۵|N=n)P(N=n) \qquad (۶۰.۲)$$



در رابطهٔ فوق، بدیهی است که چنانچه $n<۱۵$ باشد (یعنی تعداد کل مراجعین به سیستم کمتر از ۱۵ مشتری باشد)، امکان اینکه ۱۵ مشتری خدمت دریافت کرده باشند، وجود ندارد. اما، اگر $n\geqslant ۱۵$ باشد، می‌دانیم که هر مشتری که وارد شده است، به‌احتمال ۰٫۴ خدمت دریافت کرده، و به‌احتمال ۰٫۶ خدمت دریافت نکرده‌است. بنابراین، با یک توزیع دوجمله‌ای سروکار داریم، که در آن $P=۰٫۴$ و $k=۱۵$ است

$$P\{X=k|N=n\}=\begin{cases} \binom{n}{k}P^k(۱-P)^{n-k}, & \text{مشروط براینکه } n\geqslant k \\ ۰, & \text{مشروط براینکه } n<k \end{cases}$$

با جایگزینی عبارت فوق در رابطهٔ (۶۰.۲) و با در نظر گرفتن اینکه $N$ دارای توزیع پواسون است، نتیجه می‌شود که

$$P\{X=k\}=\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}\frac{P^k(۱-P)^{n-k}e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$$

$$=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{n!}{(n-k)!k!}\frac{(\lambda P)^k(\lambda(۱-P))^{n-k}e^{-\lambda}}{n!}$$

$$=\frac{e^{-\lambda}(\lambda P)^k}{k!}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(\lambda(۱-P))^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$=e^{-\lambda}\frac{(\lambda P)^k}{k!}\sum_{i=۰}^{\infty}\frac{(\lambda(۱-P))^i}{i!}$$

$$=e^{-\lambda}\frac{(\lambda P)^k}{k!}e^{\lambda(۱-P)}$$

$$=e^{-\lambda P}\frac{(\lambda P)^k}{k!}$$

در نتیجه، $X$ دارای توزیع پواسون بامیانگین $(\lambda P=۴)$ است.

**مثال ۱۰.۲** چنانچه $X$ و $Y$ متغیرهای تصادفی نمایی با پارامترهای $\lambda$ و $\mu$ باشند، احتمال $P(X<y)$ را محاسبه کنید.

حل: با استفاده از رابطهٔ (۵۸.۲)، با فرض اینکه $X=x$ باشد، احتمال پیشامد $(X<Y)$ را محاسبه می‌کنیم.

$$P(X<Y)=\int_{۰}^{\infty}P(X<Y|X=x)f(x)\,dx$$

مفهوم $P(X<Y|X=x)$، احتمال بزرگتر بودن $Y$ از متغیر تصادفی $X$ است، به شرط اینکه مقدار $x$ مشخص باشد. بنابراین،

$$P[X<Y|X=x]=P[Y>x]=e^{-\mu x}$$

قسمت آخر رابطهٔ فوق، با استفاده از فرض نمایی بودن متغیر تصادفی $Y$ به‌دست آمده است. در نتیجه

$$P(X<Y)=\int_0^\infty (e^{-\mu x})(\lambda e^{-\lambda x})\,dx$$

یا

$$P(X<Y)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu} \qquad (۶۱.۲)$$

## ۹.۲ فرمول بیز

فرمول احتمال شرطی را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد:

$$P(A|B)=\frac{P(A,B)}{P(B)}=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

با استفاده از رابطهٔ (۵۰.۲)، نتیجه می‌شود:

$$P(A|B)=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A)+P(B|A^c)P(A^c)} \qquad (۶۲.۲)$$

**مثال ۱۱.۲** محصولات کارخانه‌ای در دو کارگاه تولید می‌شود. در کارگاه اول، ۹۰ درصد کالاها و در کارگاه دوم فقط ۲۵ درصد آنها با استاندارد تطبیق می‌کند. چنانچه یک واحد کالا با استاندارد تطبیق کند، با چه احتمالی در کارگاه اول تولید شده است؟ فرض می‌کنیم میزان تولید کارگاه اول سه برابر تولید کارگاه دوم است.

حل: پیشامدهای زیر را تعریف می‌کنیم:

A. کالا از گروه یک انتخاب شده باشد؛

B. کالا با استاندارد تطبیق کند.

بنابراین مسئلهٔ مورد نظر محاسبهٔ $P(A|B)$ است. اجزای رابطهٔ (۶۲.۲) را جداگانه به‌دست می‌آوریم:

$$P(B|A)=۰٫۹$$
$$P(B|A^c)=۰٫۲$$





$$P(A)=۰٫۷۵$$

در نتیجه

$$P(A|B)=\frac{(۰٫۹)(۰٫۷۵)}{(۰٫۹)(۰٫۷۵)+(۰٫۲)(۰٫۲۵)}=\frac{۲۷}{۳۱}$$

## ۱۰.۲ تابع مولد گشتاور

تابع مولد گشتاور یک متغیر تصادفی، به‌ازای تمام مقادیر $t$ به‌شرح زیر تعریف می‌شود:

$$M_X(t)=E[e^{tX}]$$
$$=\begin{cases}\sum_x e^{tx}P(x) & \text{اگر } X \text{ گسسته باشد،}\\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}f(x)\,dx & \text{اگر } X \text{ پیوسته باشد،}\end{cases} \qquad (۶۳.۲)$$

**مثال ۱۲.۲** فرض کنید که $X$ متغیری تصادفی با توزیع پواسون و پارامتر $\lambda$ است. تابع مولد گشتاور این متغیر تصادفی به شرح زیر به‌دست می‌آید:

$$M_X(t)=\sum_{n=0}^{\infty} e^{tn}p(n)=\sum_{n=0}^{\infty} e^{tn}e^{-\lambda}\frac{(\lambda)^n}{n!}=e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^t)^n}{n!}=e^{-\lambda}e^{\lambda e^t}$$
$$=e^{\lambda(e^t-1)}$$

(در رابطهٔ فوق، بسط سری $e^x=\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ که در آن $x=\lambda e^t$ است، به کار گرفته شده است).

**مثال ۱۳.۲** تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی $Y$ با توزیع نمایی و پارامتر $\lambda$ عبارت است از:

$$M_Y(t)=\int_0^{\infty} e^{ty}f(y)\,dy=\int_0^{\infty} e^{ty}\lambda e^{-\lambda y}dy=\frac{\lambda}{\lambda-t}$$

رابطهٔ فوق فقط در مورد مقادیر $t<\lambda$ صادق است.

علت اصلی اینکه $M_X(t)$ را تابع مولد گشتاور می‌نامند، این است که با استفاده از آن می‌توان تمام گشتاورهای متغیر تصادفی را به‌دست آورد.

**قضیه ۵.۲** گشتاور $n$ام متغیر تصادفی $X$، یعنی $E(X^n)$، برابر با مشتق $n$ام تابع مولد گشتاور آن متغیر تصادفی به‌ازای $t=0$ است.

$$\left.\frac{d^n M_X(t)}{dt^n}\right|_{t=0} = E(X^n) \quad , \quad n = 1, 2, \dots \qquad (۶۲.۲)$$

اثبات: مشتقهای اول و دوم و ... $n$ام تابع مولد گشتاور عبارت‌اند از:

$$\frac{dM_X(t)}{dt} = \frac{dE(e^{tX})}{dt} = E\left(\frac{de^{tX}}{dt}\right) = E(Xe^{tX})$$

و

$$\frac{d^2 M_X(t)}{dt^2} = \frac{d}{dt}[E(Xe^{tX})] = E\left[\frac{d}{dt}(Xe^{tX})\right] = E(X^2 e^{tX})$$

و به‌همین ترتیب

$$\frac{d^n M_X(t)}{dt^n} = E(X^n e^{tX})$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، در رابطه‌های فوق چنانچه مقدار $t = 0$ در نظر گرفته شود، $E(X^n)$ به‌دست می‌آید.

**مثال ۱۴.۲** گشتاورهای اول و دوم یك متغیر تصادفی $X$ با توزیع پواسون و پارامتر $\lambda$ عبارت است از:

$$E(X) = \left.\frac{dM_X(t)}{dt}\right|_{t=0} = \lambda e^t \cdot e^{\lambda(e^t-1)}\Big|_{t=0} = \lambda$$

$$E(X^2) = e^{\lambda(e^t-1)}[(\lambda e^t)^2 + \lambda e^t]\Big|_{t=0} = \lambda^2 + \lambda$$

با استفاده از دو گشتاور اول، $\mathrm{var}(x)$ را نیز می‌توان محاسبه کرد:

$$\mathrm{var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \lambda$$

**مثال ۱۵.۲** گشتاورهای اول و دوم یك متغیر تصادفی $y$ با توزیع نمایی و پارامتر $\lambda$ عبارت است از

$$E(Y) = \left.\frac{\lambda}{(\lambda - t)^2}\right|_{t=0} = \frac{1}{\lambda}$$

$$E(Y^2) = \left.\frac{2\lambda}{(\lambda - t)^3}\right|_{t=0} = \frac{2}{\lambda^2}$$

با استفاده از دو گشتاور اول، $\mathrm{var}(Y)$ را نیز می‌توان محاسبه کرد



$$\mathrm{var}(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

یکی از عمده‌ترین کاربردهای تابع مولد گشتاور، به‌دست آوردن تابع توزیع مجموع دو متغیر تصادفی مستقل است، که از قضیهٔ زیر نتیجه‌گیری می‌شود. (تابع توزیع مجموع دو متغیر تصادفی مستقل $X$ و $Y$ را اصطلاحاً پیچش توابع توزیع $X$ و $Y$ می‌گویند).

**قضیهٔ ۶.۲** تابع مولد گشتاور مجموع دو متغیر تصادفی مستقل $X$ و $Y$ برابر با حاصل‌ضرب توابع مولد گشتاور در آنهاست، یعنی

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t) M_Y(t) \qquad (۶۵.۲)$$

اثبات: براساس تعریف تابع مولّد گشتاور و خاصیت مستقل‌بودن متغیرهای تصادفی $X$ و $Y$ داریم،

$$M_{X+Y}(t) = E[e^{t(X+Y)}] = E[e^{tX} \cdot e^{tY}] = E(e^{tX})E(e^{tY})$$

$$= M_X(t) \cdot M_Y(t)$$

**مثال ۱۶.۲** دو متغیر تصادفی مستقل $X$ و $Y$ را در نظر بگیرید. اگر این دو متغیر تصادفی دارای توزیع پواسون با پارامترهای $\lambda_1$ و $\lambda_2$ باشند، تابع توزیع $Z$، که مجموع این دو متغیر تصادفی است، را به‌دست آورید.

حل: طبق مثال ۱۳.۲، تابع مولّد گشتاور این دو متغیر تصادفی عبارت است از:

$$M_X(t) = e^{\lambda_1(e^t-1)} \qquad (۶۶.۲)$$

و

$$M_Y(t) = e^{\lambda_2(e^t-1)} \qquad (۶۷.۲)$$

طبق قضیه ۶.۲ تابع مولد گشتاور $Z$ از رابطه (۶۵.۲) به‌دست می‌آید.

$$M_Z(t) = e^{\lambda_1(e^t-1)} \cdot e^{\lambda_2(e^t-1)} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^t-1)}$$

لذا نتیجه‌گیری می‌شود که، $Z$ دارای توزیع پواسون با پارامتر $(\lambda_1+\lambda_2)$ است.

## ۱۱.۲ سریهای همگرا

در فصلهای بعدی، به‌کرات با **سریهای همگرا** برخورد خواهیم داشت. یك سری، مجموعه‌ای از اعداد به‌شکل $a_1$ و $a_2$ ... است، که آنها را جملات سری و $a_n$ را جملهٔ عمومی آن می‌نامند. منظور از همگرا (یا متقارب) بودن یك سری آن است که مجموع

جملات آن عددی متناهی باشد. به‌زبان ریاضی، یك سری همگراست، اگر

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$$

جملات یك سری می‌تواند مثبت یا منفی باشد، اما در نظریهٔ صف معمولا با جملات مثبت سروکار خواهیم داشت. بنابراین، در این مبحث فقط به‌این حالت خاص می‌پردازیم.

چند خاصیت اصلی سریهای همگرا عبارت است از:

الف ۱. در یك سری همگرا، جملهٔ عمومی $n$ام به‌سمت صفر میل می‌کند، یعنی

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \qquad (۶۸.۲)$$

باید توجه داشت که این خاصیت، شرط کافی نیست و ممکن است در سریهای غیرهمگرا نیز وجود داشته باشد. لیکن، اگر حد نهایی جمله‌ای صفر نباشد، می‌توان استنتاج کرد که آن سری همگرا نیست.

۲. سری نمایی. اگر جملهٔ عمومی یك سری به شکل $a_n = x^n/n!$ و $x<1$ باشد، مجموع جملات آن از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = e^x \qquad (۶۹.۲)$$

۳. اگر جملهٔ عمومی یك سری به‌شکل $nx^{n-1}$ و $x<1$ باشد، مجموع جملات آن به‌شرح زیر محاسبه می‌شود:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}(x^n) = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

اما، از رابطهٔ (۶۷.۲) نتیجه می‌شود، که:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

بنابراین،

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad (۷۰.۲)$$

اگر محاسبهٔ مجموع تعدادی محدود از اعضای این سری مدنظر باشد، خواهیم داشت:

$$\sum_{n=0}^{N} nx^{n-1} = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{N} x^n\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1-x^{N+1}}{1-x}\right)$$



یا

$$\sum_{n=0}^{N} nx^{n-1} = \frac{1-x^N-Nx^N+Nx^{N+1}}{(1-x)^2} = \frac{1-x^N}{(1-x)^2} - \frac{Nx^N}{1-x} \qquad (۷۱.۲)$$

ب. اگر حد خارج‌قسمت دوجملهٔ متوالی یك سری، یعنی $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ ~~$(a_{n+1}/a_n)$~~، همواره‌از عددی کوچکتر از واحد، مانند $k$، کوچکتر باشد، آن سری همگراست.

ج. اگر حد جمله $(a_n)^{1/n}$ از عددی کوچکتر از واحد، مانند $k$، کوچکتر باشد، آن سری همگراست.

در این قسمت، چند نمونه سری همگرا با جملات مثبت را که درنظریهٔ صف مورد استفاده قرار می‌گیرد، بررسی می‌کنیم.

## ۱۲.۲ سری تصاعد هندسی

اگرمیان جملات یك سری، رابطهٔ زیر برقرار باشد، به‌آن سری تصاعد هندسی می‌گویند.

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \dots = \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

یا

$$a_n = a_1 q^{n-1} \dots$$

$q$ را قدر نسبت تصاعد می‌گویند. اگر $q<1$ باشد، مجموع جملات سری عبارت‌است‌از:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-q} \qquad (۷۲.۲)$$

اگرمجموع تعدادی متناهی از جملات مدنظر باشد،

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = \frac{a_1 - a_{N+1}}{1-q} \qquad (۷۳.۲)$$

در رابطهٔ فوق، شرط $q<1$ ضرورت ندارد.

## ۱۳.۲ تبدیل z

تبدیل $z$، که‌گاهی به‌آن **تابع مولّد** نیز می‌گویند، نقش و کاربردی شبیه تابع مولّد گشتاور دارد. این‌نوع تبدیل منحصراً برای متغیرهای تصادفی گسسته (و به‌طوراعم توابع گسسته) به‌کار گرفته می‌شود.

متغیر تصادفی گسستهٔ $x$ را در نظر بگیرید که فقط مقادیر عدد صحیح غیرمنفی را انتخاب می‌کند. چنانچه تابع احتمال این متغیر تصادفی به‌شرح زیر باشد،

$$p_i = P[X = i]$$

در این‌صورت، تبدیل $z$ در مورد این متغیر تصادفی برحسب تعریف عبارت است از:

$$P(z) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i z^i \qquad (۷۴.۲)$$

به‌شرط اینکه $z$ طوری انتخاب شود که $p_i z^i$ سری همگرا باشد. برای نمونه اگر $|z| < 1$ باشد، این شرط همواره برقرار است.

**مثال ۱۷.۲** اگر $X$ دارای توزیع هندسی باشد، تبدیل $z$ آنرا محاسبه کنید.

حل: تابع توزیع احتمال این متغیر تصادفی عبارت است از:

$$p_i = p(1-p)^i \quad , \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

طبق تعریف $P(z)$ برای این متغیر تصادفی به‌شرح زیر است.

$$P(z) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i z^i = \sum_{i=0}^{\infty} P(1-p)^i z^i = P \sum_{i=0}^{\infty} [(1-p)z]^i$$

با در نظر گرفتن مجموع سری هندسی، نتیجه می‌شود که

$$P(z) = \frac{p}{1-qz} \qquad (۷۵.۲)$$

**مثال ۱۸.۲** تبدیل $z$ یک متغیر تصادفی با توزیع دوجمله‌ای را محاسبه کنید.

حل: تابع توزیع این متغیر تصادفی عبارت است از:

$$p_i = P(X = i) = \binom{n}{i} p^i q^{n-i} \quad , \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

و تبدیل $z$ آن به‌شرح زیر محاسبه می‌شود.

$$P(z) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (pz)^i q^{n-i}$$

(باید در نظر داشت که به‌ازای $i \geqslant n+1$ رابطه $p_i = 0$ برقرار است). با توجه به بسط سری دوجمله‌ای، نتیجه می‌شود که:

$$P(z) = (q + pz)^n \qquad (۷۶.۲)$$



**تعیین $p_i$ با استفاده از تبدیل $z$**

رابطه بین $p_i$، $(i = 0, 1, \dots, n)$ و $P(z)$ رابطه‌ای منحصربه‌فرد است و با مشخص بودن هر کدام، امکان محاسبه دیگری وجود دارد.

**قضیهٔ ۷.۲** چنانچه تبدیل $z$ یک متغیر تصادفی $P(z)$ باشد، در این‌صورت تابع توزیع احتمال آن، متغیری تصادفی به‌شرح زیر خواهد بود:

$$p_0 = P(z)\big|_{z=0} \qquad (۷۷.۲)$$

$$p_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n P(z)}{dz^n}\bigg|_{z=0} \quad , \quad n = 1, 2, \dots \qquad (۷۸.۲)$$

اثبات: با توجه به‌اینکه

$$P(z) = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + p_3 z^3 + \dots \qquad (۷۹.۲)$$

$$P'(z) = p_1 + 2p_2 z + 3p_3 z^2 \qquad (۸۰.۲)$$

$$P''(z) = 2p_2 + 3!\, p_3 z \qquad (۸۱.۲)$$

در روابط فوق، اگر $z = 0$ باشد، روابط (۷۷.۲) و (۷۸.۲) به‌ازای $n = 1, 2$ اثبات می‌شود. به‌همین ترتیب، رابطهٔ (۷۸.۲) به‌ازای مقادیر $n \geqslant 3$ نیز ثابت می‌شود.

**مثال ۱۹.۲** اگر تبدیل $z$ یک متغیر تصادفی $e^{-\lambda(1-z)}$ باشد، تابع توزیع احتمال مربوطه را تعیین کنید.

حل: طبق روابط (۷۷.۲) و (۷۸.۲) نتیجه می‌شود

$$p_0 = e^{-\lambda}$$

$$p_n = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \quad , \quad n \geqslant 1$$

یعنی $x$ دارای توزیع پواسون با پارامتر $\lambda$ است.

در این مثال، تابع توزیع احتمال فوق را از تعریف تبدیل $z$ نیز می‌توان محاسبه کرد، زیرا با استفاده از بسط سری نمایی خواهیم داشت.

$$P(z) = e^{-\lambda(1-z)} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda z} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} z^n$$

در نتیجه

$$P_n = e^{-\lambda} \lambda^n / n!$$

بعضی از خواص تبدیل $z$ را به‌شرح زیر می‌توان بیان کرد.

$$P(1) = 1 \qquad (۸۲.۲)$$

$$E(X)=P'(1) \qquad (۸۳.۲)$$

$$\operatorname{var}(X)=P''(1)+P'(1)-[P'(1)]^2 \qquad (۸۴.۲)$$

به‌ازای $z=1$، از رابطه‌های (۷۸.۲) و (۷۹.۲) و (۸۰.۲) خواص فوق استنتاج می‌شود.

**قضیهٔ ۸.۲** اگر $X_1$ و $X_2$، متغیرهای تصادفی مستقل، و $P_1(z)$ و $P_2(z)$، به‌ترتیب معرف تبدیل $z$ آنها، و $X=X_1+X_2$ باشد، در این‌صورت تبدیل $z$ متغیر تصادفی $X$، از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$P(z)=P_1(z)P_2(z) \qquad (۸۵.۲)$$

**اثبات:** فرض کنید

$$q_i=P[X_2=i] \quad \text{و} \quad p_i=P[X_1=i]$$

بنابراین

$$P(X=n)=P(X_1+X_2=n)=\sum_{k=0}^{n}P(X_1=i)P(X_2=n-i)=\sum_{i=0}^{n}p_iq_{n-i}$$

در نتیجه

$$P(z)=\sum_{n=0}^{\infty}P(X=n)z^n=\sum_{n=0}^{\infty}z^n\sum_{i=0}^{n}p_iq_{n-i}=\sum_{i=0}^{\infty}p_iz^i\sum_{n=i}^{\infty}q_{n-i}z^{n-i}$$

$$=p_1(z)p_2(z)$$

**قضیهٔ ۹.۲** اگر تبدیل $z$ یك متغیر تصادفی مانند $x$ برابر با $P(z)$ باشد، تبدیل $z$ متغیر تصادفی $bx$ برابر با $bp(z)$ است. ($b$ عددی ثابت است).

**کاربرد تبدیل $z$ در حل معادلات تفاضلی**

یکی از مهمترین کاربردهای تبدیل $z$، حل **معادلات تفاضلی** است، که در آنها توابعی وجود دارند که متغیرهایشان عدد صحیح هستند، برای نمونه

$$(\lambda+\mu)p_n=\mu p_{n+1}+\lambda p_{n-1} \quad , \quad n=1,2,\dots$$

یا

$$f(n+2)-f(n+1)-f(n)=0 \quad , \quad n=0,1,2,\dots$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، در اولین دستگاه معادلات، توابع مورد نظر $p_n$ و در دومی $f(n)$ هستند. متغیرهای این توابع $n$ است، که فقط مقادیر عدد صحیح را انتخاب می‌کند. (در



دستگاه معادلات اولی $\lambda$ و $\mu$ پارامترهای ثابت هستند).

هدف از حل دستگاه معادلات تفاضلی، پیدا کردن مقادیر تابع به‌ازای متغیرهای مختلف، یعنی $p_1, p_2, \dots$ است، به‌طوری که در دستگاه معادلات صدق کند. کاربرد حل معادلات تفاضلی در مثالهای زیر نشان داده می‌شود.

**مثال ۱۰.۲** معادلات تفاضلی زیر را با استفاده از تبدیل $z$ حل کنید:

$$p_{n+1}-(1+a)p_n+ap_{n-1}=0 \quad , \quad n=1,2,\dots \qquad (۸۶.۲)$$

و

$$p_1-ap_0=0$$

فرض بر این است که $p_n$ معرف تابع احتمال یك متغیر تصادفی است.

حل: تبدیل $z$ توابع $p_n$ را به‌شرح زیر تعریف می‌کنیم:

$$P(z)=\sum_{n=0}^{\infty}p_nz^n$$

ضمناً عبارات معادلهٔ (۸۶.۲) را در $z^n$ ضرب و همه را باهم جمع می‌کنیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}p_{n+1}z^n-(1+a)\sum_{n=1}^{\infty}p_nz^n+a\sum_{n=1}^{\infty}p_{n-1}z^n=0 \qquad (۸۷.۲)$$

طبق تعریف مربوط به $P(z)$ نتیجه می‌شود که

$$\sum_{n=1}^{\infty}p_{n+1}z^n=\frac{1}{z}\sum_{n=1}^{\infty}p_{n+1}z^{n+1}=\frac{1}{z}[P(z)-p_0-p_1z]$$

و

$$\sum_{n=1}^{\infty}p_nz^n=P(z)-p_0$$

و

$$\sum_{n=1}^{\infty}p_{n-1}z^n=z\sum_{n=1}^{\infty}p_{n-1}z^{n-1}=zP(z)$$

متن صفحه صفحه
به این قسمت مستقل شود

و

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\lambda_ip_{n-i}z^n=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_iz^i\sum_{n=i}^{\infty}p_{n-i}z^{n-i}=L(z)P(z)$$

پس از جایگزینی روابط فوق در رابطهٔ ۷۹.۲ نتیجه می‌شود که

$$P(z)=\frac{\mu p_0(1-z)}{\mu(1-z)-z[\lambda-L(z)]}$$

با استفاده از رابطهٔ فوق مقادیر $p_n$ محاسبه می‌شود.

## مسائل

۱. در ظرفی سه توپ، یك توپ سفید، یك توپ سیاه و یك توپ قرمز وجود دارد. یك توپ به‌طور تصادفی از آن برمی‌داریم. آن‌گاه این توپ را مجدداً به‌ظرف برمی‌گردانیم و توپی دیگر را از آن برمی‌داریم. فضای نمونهٔ این آزمایش چیست؟ احتمال اینکه هر دو توپ سفید باشند، چیست؟ احتمال اینکه یك توپ سیاه و یك توپ سفید باشد، چیست؟

۲. مسئلهٔ ۱ را مجدداً حل کنید، با این تفاوت که توپ برداشته شده از ظرف مجدداً برگردانیده نشود.

۳. مسئلهٔ ۱ را مجدداً حل کنید، با این تفاوت که در ظرف چهار توپ، دو توپ سفید، یك توپ سیاه، و یك توپ قرمز، وجود داشته باشد.

۴. به‌جای استفاده از فضای نمونه، با استفاده از متغیر تصادفی مناسب، مسئلهٔ ۳ را مجدداً حل کنید.

۵. متغیر تصادفی $X$، فقط مقادیر عدد صحیح غیرمنفی را انتخاب می‌کند، نشان دهید که

$$E(X)=\sum_{n=1}^{\infty}P(X\geqslant n)=\sum_{m=0}^{\infty}P(X>m)$$

۶. در ظرفی $n$ توپ وجود دارد، که با شماره‌های ۱ و ۲ و ... و $n$ مشخص شده‌اند. یك توپ را به‌طور تصادفی انتخاب و پس‌از یادداشت‌کردن شمارهٔ آن، به‌ظرف برمی‌گردانیم. این‌کار را ادامه می‌دهیم، تا اینکه توپی برای دومین بار برداشته شود، که در این‌صورت متوقف می‌شویم. چنانچه $X$ را تعداد دفعات آزمایش فرض کنیم، نشان دهید که $P(k)=P(X=k)$ از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.

$$P(k)=(k-1)!\binom{n}{k-1}\frac{k-1}{n^k}\quad,\ k=2,3,\dots,n+1$$

آن‌گاه با استفاده از روش و نتیجهٔ مسئلهٔ ۵، تابع توزیع $X$ را تعیین کنید. ضمناً نشان دهید که میانگین $X$ از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.

$$E(X)=2+\left(1-\frac{1}{n}\right)+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\dots+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$



۷. شخصی در آزمونی شرکت و یکی از نمرات الف، ب، ج، د و ه را دریافت می‌کند. چنانچه نمرهٔ الف بگیرد، برنده اعلام می‌شود و دیگر در این آزمون شرکت نمی‌کند. چنانچه نمرهٔ او ه باشد هم، حق شرکت مجدد در آزمون را ندارد. درغیر این دوحالت، آن‌قدر در آزمون شرکت می‌کند تا یکی از دو نمرهٔ فوق را دریافت کند. فرض کنید که نتیجهٔ آزمونها مستقل از یکدیگر و احتمال گرفتن نمره‌های الف، ب، ج، د و ه به‌ترتیب $P_1$، $P_2$، $P_3$، $P_4$، $P_5$ باشد. فضای نمونهٔ این مسئله را بنویسید. نشان دهید که احتمال توقف شرکت در آزمون به‌علت گرفتن نمرهٔ الف، برابر با نتیجهٔ رابطهٔ زیر است:

$$\frac{P_1}{P_1+P_5}$$

۸. تاسی را دوبار پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه تاس اول ۵ باشد، چقدر است، مشروط براینکه بدانیم مجموع دو تاس برابر با ۸ بوده است؟

۹. احتمال اینکه در یك روز $K$ مشتری به سیستمی مراجعه کنند را $P_k$ فرض می‌کنیم. احتمال اینکه در دو روز جمعاً ۱۵ مشتری به‌این سیستم مراجعه کنند، چقدر است؟ فرض کنید که تعداد مشتریهایی که در روزهای مختلف مراجعه می‌کنند مستقل از یکدیگر است.

۱۰. با فقط یکی از $n$ کلید موجود، می‌توانیم دری را بازکنیم. در دوحالت زیر، احتمال اینکه در دفعهٔ $i$ام بتوان در را بازکرد، چقدر است؟ میانگین و واریانس تعداد کلیدهای امتحان شده را در هر دو حالت زیر حساب کنید.

الف. کلیدهایی که در را باز نمی‌کنند، کنار گذاشته شوند.

ب. کلیدهایی که در را باز نمی‌کنند، کنار گذاشته نشوند.

۱۱. از ۱۵ عدد توپ موجود، نه عدد آن نو است. دربازی اول سه توپ به‌طور تصادفی انتخاب می‌کنیم. پس‌از بازی، آنها را برگشت می‌دهیم. در بازی دوم سه توپ دیگر را، بازهم به‌طور تصادفی انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه هرسه توپ نو باشند، چیست؟ (فرض می‌شود که توپهای مصرف شده در بازی اول دیگر نو محسوب نمی‌شوند).

۱۲. در ظرفی ۵ توپ‌سفید و ۷ توپ‌سیاه و درظرف دیگر، سه توپ‌سفید و ۱۲ توپ‌سیاه وجود دارد. سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. اگر نتیجه شیر باشد، از ظرف شمارهٔ ۱ و اگر خط باشد از ظرف شمارهٔ ۲، توپی برمی‌داریم. اگر توپی که برداشته‌ایم سفید باشد، به‌چه احتمالی نتیجهٔ پرتاب سکه شیر بوده است؟

۱۳. در مثال ۴.۲، آیا دو متغیر تصادفی $X$ و $Y$ مستقل‌اند؟ چرا؟

۱۴. شش دانشجوی دانشکدهٔ «الف» و شش دانشجوی دانشکدهٔ «ب»، در یك آزمایشگاه ثبت‌نام کرده‌اند. برای آزمایش، آنها را به‌طور تصادفی به دو گروه تقسیم کرده‌اند. احتمال اینکه در گروه اول $n$نفردانشجوی دانشکدهٔ «الف» جای گرفته باشند، چقدراست؟

۱۵. یک متغیر تصادفی در فاصلهٔ (۱، ۱ −) دارای تابع چگالی $C(1-X^2)$ است. مقدار $C$ را تعیین کنید. تابع توزیع این متغیر تصادفی را محاسبه کنید. احتمال اینکه $X$ بین صفر تا ۰٫۷۵ باشد، چقدر است؟

۱۶. متغیرهای تصادفی مستقل $x_1, x_2, \dots, x_n$ را درنظر بگیرید، که دارای تابع توزیع یکنواخت در فاصلهٔ (۱ و ۰) هستند. متغیر تصادفی جدید $M$ را به‌شرح زیر تعریف می‌کنیم:

$$M = \max(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

نشان دهید که تابع توزیع $M$ عبارت خواهد بود از:

$$F_M(x) = x^n, \quad \text{مشروط براینکه} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

تابع چگالی این متغیر تصادفی را به‌دست آورید.

۱۷. متغیری تصادفی، مقادیر ۱ و ۲ و ۳ را با احتمال مساوی انتخاب می‌کند. با استفاده از تابع مولد گشتاور این متغیر تصادفی، مقدار $E(x)$ و $E(x^2)$ را به دست آورید و نتایج به‌دست آمده را با محاسبهٔ مستقیم این گشتاورها مقایسه کنید.

۱۸. دو متغیر تصادفی مستقل $X$ و $Y$ را در نظر بگیرید. فرض کنید که $X$ دارای توزیع نمایی و $Y$ دارای تابع توزیع دلخواه $G$ باشد. مقدار رابطهٔ زیر را حساب کنید:

$$P(X<Y)$$

۱۹. فرض کنید که $X$ معرف تعداد پرتابهای تاس تا آمدن اولین عدد ۶ و $Y$ معرف تعداد پرتابها تا آمدن اولین عدد ۱ باشد. کمیتهای زیر را حساب کنید

$$E(X|Y=3), \quad E(X|Y=1), \quad E(X)$$

۲۰. فرض کنید که $X_1, X_2, \dots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل و همه دارای تابع توزیع یکسان هستند. از طرف دیگر $N$ نیز متغیر تصادفی است. ثابت کنید که

$$E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = E[N]E[X]$$

$$\operatorname{var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = E[N]\operatorname{var}(X) + (E(X))^2 \operatorname{var}(N)$$

۲۱. متغیر تصادفی $X$ را در نظر بگیرید که دارای تابع پواسون با پارامتر $Y$ است. اگر $Y$ نیز یک متغیر تصادفی با توزیع نمایی و پارامتر $m$ باشد، در این‌صورت تابع توزیع $X$ را به‌دست آورید.

۲۲. چگالی مشترک $X$ و $Y$ عبارت است از:



$$f(x,y) = \frac{e^{-x/y}e^{-y}}{y}, \quad 0<x<\infty, \quad 0<y<\infty$$

مقدار $E(X|Y=y)$ را به‌دست آورید.

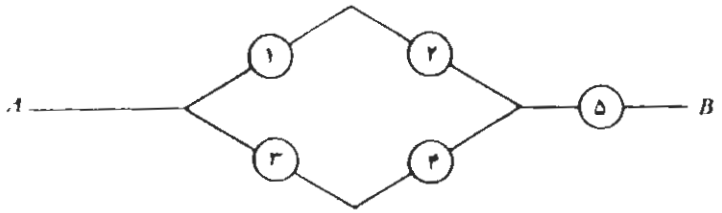
۲۳. اگر $X$ یک متغیر تصادفی با توزیع نمایی باشد، $E(X|X>1)$ را محاسبه کنید.

۲۴. در دو کفه ترازو، دو وزنه می‌گذاریم، که هر کدام از آنها متغیری تصادفی است. اولی دارای توزیع نرمال با میانگین ۲۰ و واریانس ۱ و دومی دارای توزیع یکنواخت در فاصلهٔ (۵۰، ۰) است. احتمال اینکه وزنهٔ اولی سنگین‌تر باشد، چقدر است؟

۲۵. احتمال اینکه در یک تیراندازی تیر به‌هدف بخورد برابر با $(3000\,D^{-1})$ است، که $D$ فاصلهٔ تیرانداز تا هدف فرض می‌شود. چنانچه هدف متحرک و فاصلهٔ آن نیز متغیری تصادفی با توزیع یکنواخت از فاصلهٔ ۱۰۰ تا ۲۰۰ باشد، در این‌صورت احتمال برخورد تیر به هدف را به‌دست آورید.

۲۶. در یک ظرف ۶ توپ سفید و ۴ توپ سیاه وجود دارد. عدد $n$ را به‌طور تصادفی از بین اعداد (۱,۲,۳,۴,۵,۶) انتخاب می‌کنیم. آن‌گاه $n$ عدد توپ از ظرف برمی‌داریم. احتمال اینکه همهٔ توپها سفید باشد، چیست؟

۲۷. یک مدار برقی در شکل نشان داده شده است. در طول یک آزمایش، جزء شمارهٔ $i$ $(i=1,2,\dots,5)$ به‌احتمال $P_i$ از کار می‌افتد و عبور جریان از آن امکان ندارد. احتمال اینکه در انتهای آزمایش جریان از $A$ به $B$ عبور کند، چقدر است؟




۲۸. در کارخانه‌ای یک نمونهٔ سه‌تایی از کالایی برای بازرسی انتخاب شده است. اگر در این کارخانه ۵ خط تولید مشابه وجود داشته باشد، احتمال اینکه این کالاها از خطوط مختلف انتخاب‌شده باشد، چقدر است؟ (یا به‌عبارت دیگر احتمال اینکه دو عدد یا بیشتر کالا روی یک خط تولید نشده باشد، چقدر است؟

۲۹. در مورد هر تبدیل $z$ به‌شرح زیر، تابع $f_n$ مربوطه را تعیین کنید. ($f_n$ لزوما تابع احتمال نیست)

الف. $$P(z) = \frac{10}{1-z}$$

ب. $P(z)=\frac{8}{1-5z}$

ج. $P(z)=\frac{8z}{(1-5z)^2}$

د. $P(z)=3e^{z}$

**۳۰.** تابع $f_n$ مربوط به‌تبدیل $z$ به‌شرح زیر را تعیین کنید.

$$P(z)=\frac{1+12z}{1+z-6z^2}$$

**راهنمایی:** $P(z)$ را به‌مجموع دو کسر تبدیل کنید که مخرج آنها درجه یك و صورت آنها فاقد متغیر $z$ باشد.

**۳۱.** معادلهٔ تفاضلی زیر را حل کنید.

$$p_{n+2}-5p_{n+1}+6p_n=0$$

که $p_0=0$ و $p_1=1$ است.

# ۳

# توزیع نمایی[1] و فرایند پواسون

در نظریهٔ صف، **توزیع نمایی، فرایند پواسون و توزیع ارلانگی** نقش اساسی دارند. مدلهایی که زمان بین دو ورود متوالی مشتریها و یا مدت خدمت‌دهی آنها متغیری تصادفی با توزیع نمایی است، ساده‌ترین حالتها محسوب می‌شوند. در بسیاری از موارد نیز متغیرهای تصادفی فوق را می‌توان، با تقریب کافی، دارای توزیع نمایی فرض کرد. ضمناً خواهیم دید که توزیع نمایی و فرایند پواسون با یکدیگر رابطهٔ نزدیك دارند و در واقع به‌یك پدیدهٔ واحد از دو دید مختلف می‌نگرند.

در فصول بعد، مدلهای صفی را که براساس فرایند پواسون ساخته شده‌اند، مورد بررسی قرار می‌دهیم

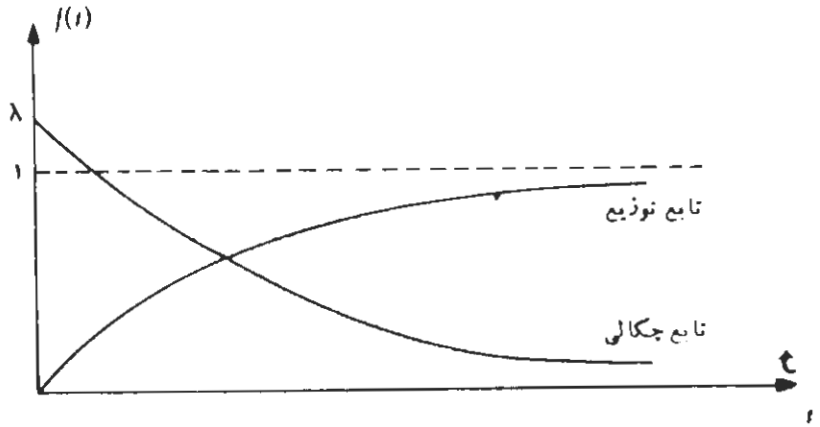
## ۱.۳ توزیع نمایی

**تعریف.** متغیر تصادفی $X$ دارای توزیع نمایی است. اگر، به‌ازای تمام مقادیر $x \geqslant 0$، تابع چگالی آن به‌شکل زیر باشد ($\lambda$ پارامتر مدل نامیده می‌شود).

$$f(x)=\lambda e^{-\lambda x} \qquad (1.3)$$

تابع توزیع این متغیر تصادفی را (به‌ازای $x \geqslant 0$) به‌شرح زیر محاسبه می‌کنند.

۱. در بعضی از کتب و مقالات به‌این متغیر تصادفی، نمایی منفی هم می‌گویند.




**شکل ۱.۳** تابع چگالی و تابع توزیع نمایی

$$F(x)=P(X\leqslant x)=\int_0^x f(y)\,dy=1-e^{-\lambda x} \qquad (۲.۳)$$

به‌همین ترتیب،

$$P(X>x)=e^{-\lambda x} \qquad (۳.۳)$$

**محاسبهٔ میانگین و واریانس توزیع نمایی**

میانگین این متغیر تصادفی به‌شرح زیر محاسبه‌می‌شود:

$$E(X)=\int_0^\infty (x)(\lambda e^{-\lambda x})dx=\frac{1}{\lambda} \qquad (۴.۳)$$

واریانس را می‌توان از تابع مولّد گشتاور به‌دست آورد، که عبارت است از:

$$M_X(t)=E(e^{tx})=\int_0^\infty (e^{tx})(\lambda e^{-\lambda x})dx=\frac{\lambda}{\lambda-t}\ ,\ (t<\lambda \text{ با فرض}) \qquad (۵.۳)$$

با مشتقگیری از این تابع، می‌توان گشتاورهای مختلف و از جمله $E(X^2)$ را حساب کرد.

$$E(X^2)=\frac{d^2M(t)}{dt^2}\bigg|_{t=0}=\frac{2\lambda}{(\lambda-t)^3}\bigg|_{t=0}=\frac{2}{\lambda^2} \qquad (۶.۳)$$

و

$$\mathrm{var}(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{2}{\lambda^2}-\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2=\frac{1}{\lambda^2} \qquad (۷.۳)$$



(میانگین این متغیر تصادفی را نیز می‌توان با مشتقگیری از تابع مولد گشتاور به دست آورد، که همان $1/\lambda$ حاصل می‌شود).

## ۲.۳ خواص توزیع نمایی

### الف. خاصیت بدون حافظه بودن

مهمترین خاصیت توزیع نمایی این‌است که گذشتهٔ آن نقشی در آینده‌اش ندارد. فرض کنید که زمان وقوع یك اتفاق، متغیری تصادفی با توزیع نمایی باشد. اگر تا لحظهٔ معینی، مثلاً $s$، این اتفاق نیفتاده باشد، می‌توان از این مدت زمان صرف‌نظر کرد و مبدأ زمان را به‌این لحظه (لحظهٔ $s$ به‌جای صفر) انتقال داد.

مثلاً، اگر خراب شدن ماشینی دارای توزیع نمایی باشد و پس‌از مدتی، مثلاً سه سال، ماشین مزبور هنوز خراب نشده باشد، خاصیت بدون حافظه بودن آن حکم می‌کند که سه سال گذشته را باید فراموش کرد و زمان حال را مبنای محاسبات در نظر گرفت. بدین ترتیب، احتمال خراب شدن این ماشین کهنه با احتمال خراب شدن ماشین نو معادل آن یکسان است. برای بیان این موضوع به‌زبان ریاضی، فرض کنید که $X$، متغیر تصادفی با توزیع نمایی باشد. می‌خواهیم نشان دهیم که به‌ازای تمام مقادیر $X$ و $s$ رابطهٔ زیر صادق است

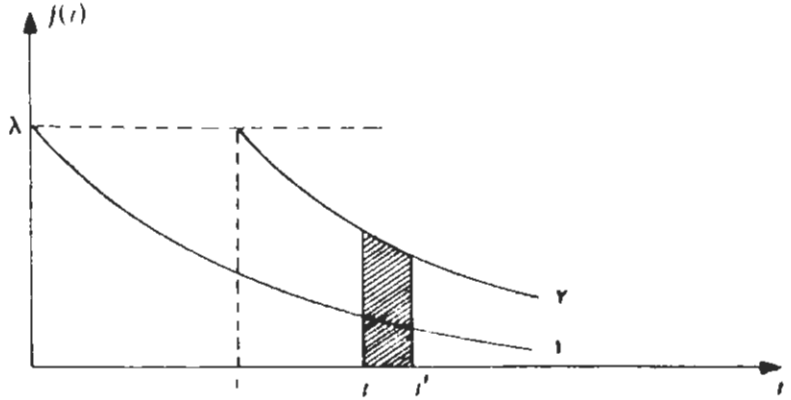
$$P[X>s+x\,|\,X>s]=P[X>x] \qquad (۸.۳)$$

هر دو طرف رابطهٔ فوق، احتمال خراب‌نشدن ماشین را، حداقل تا لحظهٔ $x$ (نسبت به‌زمان فعلی) نشان می‌دهند. طرف سمت راست، مربوط به ماشین نو است، درحالی‌که عبارت سمت چپ به‌ماشینی مربوط است که تا این لحظه عمری به‌اندازهٔ $s$ داشته است. برای اثبات رابطهٔ ۸.۳، از خاصیت احتمال شرطی استفاده می‌شود، یعنی

$$P(X>s+x\,|\,X>s)=\frac{P(X>s+x,\ X>s)}{P(X>s)}$$

$$=\frac{P(X>s+x)}{P(X>s)}=\frac{e^{-\lambda(s+x)}}{e^{-\lambda s}}=e^{-\lambda x}=P(X>x)$$

این پدیده را می‌توان با کمك منحنیهای شکل ۲.۳ نیز نشان داد. فرض کنید که منحنی شمارهٔ ۱ نشاندهندهٔ تابع چگالی متغیری تصادفی با توزیع نمایی و پارامتر $\lambda$ است. می‌خواهیم حساب کنیم با چه‌احتمالی ماشین در فاصلهٔ $t$ تا $t'$ خراب می‌شود. اگر در لحظهٔ صفر باشیم، این‌احتمال برابر بامساحت زیرمنحنی درهمین فاصله است. اما اگر در لحظهٔ $s$ باشیم وماشین‌هنوز خراب‌نشده باشد، این احتمال برابر با مساحت زیرمنحنی شمارهٔ (۲) درهمین‌فاصله‌است، زیرا به‌علت‌خاصیت بدون حافظه‌بودن توزیع‌نمایی، مبدأ زمان به‌لحظهٔ




**شکل ۲.۳** خاصیت بدون حافظه بودن توزیع نمایی

s انتقال می‌یابد. بدطوری‌که مشاهده می‌شود، دراین حالت مقدار احتمال بیشتراز حالت قبلی است.

**مثال ۱.۳** فرض کنید کـه مدت مکالمات تلفنی، متغیری تصادفی با توزیع نمایی و میانگین ۵ دقیقه است. شخصی بـه‌یك تلفن عمومی مراجعه و مشاهده می‌کند کـه شخص دیگری در حال مکالمه است، اما معلوم نیست که مکالمه‌اش از چه زمانی شروع شده‌است؟ احتمال اینکه ایـن شخص مجبور شود بیش‌از یك ساعت منتظر آزاد شدن تلفن بمانـد، چقدر است؟

حل: چون متغیر تصادفی نمایی بدون حافظه است، می‌توان فرض کرد که مکالمه از همان لحظه آغاز شده است. از طرف دیگر، چون میانگین مکالمه ۵ دقیقه است، پارامتر λ برابر با ۱/۵ خواهد بود. اگر مدت زمان مکالمهٔ تلفن‌کننده را X فرض کنیم،

$$P(X>۶۰)=e^{-۶۰(۱/۵)}=e^{-۱۲}$$

**قضیهٔ ۱.۳** تنها متغیر تصادفی پیوسته بدون حافظه، نمایی است

اثبات: متغیر تصادفی X، که بدون حافظه است، را درنظر بگیرید. طبق این‌خاصیت، رابطهٔ (۸.۳) به‌ازای تمام مقادیر t و s برقراراست. از طرفی، براساس احتمال شرطی، داریم.

$$P(X>t+s|X>s)=\frac{P(X>t+s,\ X>s)}{P(X>s)}=\frac{P(X>t+s)}{P(X>s)} \qquad (۹.۳)$$

بااستفاده از رابطه‌های (۸.۳) و (۹.۳)، رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$P(X>t+s)=P(X>s)P(X>t) \qquad (۱۰.۳)$$

نسبت به s مشتق می‌گیریم.



$$\frac{d}{ds}P(X>t+s)=P(X>t)\frac{d}{ds}P(X>s) \qquad (۱۱.۳)$$

از طرف دیگر، با توجه بداین موضوع کـه تابع چگالی مشتق تابع توزیع است، رابطهٔ زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{d}{ds}P(X>s)=\frac{d}{ds}[1-P(X\leqslant s)]=-\frac{d}{ds}P(X\leqslant s)=-f(s) \qquad (۱۲.۳)$$

که $f(s)$ تابع چگالی متغیر تصادفی X به‌ازای مقدار s است. از رابطه‌های (۱۱.۳) و (۱۲.۳) نتیجه گیری می‌شود که

$$\frac{d}{ds}P(X>s+t)=-f(s)P(X>t)$$

ابتدا طرفین را بـر $P(X>t)$ تقسیم می‌کنیم. از طرفی، چون نتایج فوق به‌ازای تمام مقادیر s صادق است، آن‌را به‌طور دلخواه مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$\frac{dP(X>t)}{P(X>t)}=-f(۰)ds \qquad (۱۳.۳)$$

از طرفین انتگرال معین (از صفر تا t) گرفته می‌شود، که حاصل آن عبارت است‌از:

$$Ln[P(X>t)]=-f(۰)\cdot t$$

یا

$$P(X>t)=e^{-f(۰)t} \qquad (۱۴.۳)$$

رابطهٔ (۱۴.۳) نشان می‌دهد که X دارای توزیع نمایی با پارامتر $f(۰)$ است.

در نظریهٔ صف، استفاده از خاصیت بدون حافظه بودن، محاسبات را بسیار آسانتر می‌کند، زیرا می‌توان با صرف‌نظر کردن از اتفاقات گذشته، هر زمانی را بـه عنوان مبدأ محاسبات در نظر گرفت. اگـر زمان بین دو ورود متوالی مشتریها، دارای توزیع نمایی باشد، اطلاع از زمان ورود مشتریهای قبلی ضرورتی ندارد.

**مثال ۲.۳** فرض کنید که مدت زمانی کـه یك مشتری در داخل سیستم می‌گذراند، متغیر تصادفی با توزیع نمایی و میانگین ۴۰ دقیقه باشد. احتمال اینکه یك مشتری حداقل یك ساعت در سیستم باشد. چقدر است؟ احتمال اینکه یك مشتری حـداقل یك ساعت در سیستم باشد، درحالی که می‌دانیم تـا این لحظه حداقل نیم‌ساعت را در سیستم گذرانده، چقدر است؟

حل: متغیر تصادفی X را مدت‌زمان توقف مشتری درسیستم فرض می‌کنیم. می‌دانیم

که میانگین توقف مشتری ۴۰ دقیقه (یا دو سوم ساعت) است. بنابراین، $\lambda = 1.5$ به‌این ترتیب، جواب اولین سؤال عبارت است از:

$$P(X>1)=e^{-\lambda}=e^{-1.5}$$

اما در مورد دومین سؤال، با درنظر گرفتن خاصیت بدون حافظه بودن این متغیر تصادفی،

$$P(X>1\mid X>0.5)=P(X>0.5)=e^{-(1.5)(0.5)}=e^{-0.75}$$

**ب. حداقل چندمتغیر تصادفی مستقل با توزیع نمایی، یک‌متغیر تصادفی با توزیع نمایی است**

برای تشریح این خاصیت، سیستم صفی را با $n$ خدمت‌دهنده درنظر بگیرید. فرض کنید در زمانی که یک مشتری جدید وارد سیستم می‌شود، همهٔ خدمت‌دهندگان مشغول هستند. در ضمن، صفی هم تشکیل نشده است. در این‌صورت، مدت زمانی که مشتری باید در صف منتظر بماند، عبارت است از فاصلهٔ زمانی ورود او تا لحظه‌ای که حداقل یکی از خدمت‌دهندگان آزاد می‌شود. به عبارت دیگر، مدت انتظار او، که البته متغیر تصادفی است، حداقل چند متغیر تصادفی دیگر (مدت خدمت‌دهی خدمت‌دهندگان) است. می‌خواهیم نشان دهیم که اگر این متغیرهای تصادفی دارای توزیع نمایی باشند، حداقل آنها نیز دارای توزیع نمایی خواهد بود. پارامتر این توزیع نمایی نیز، مجموع پارامترهای متغیرهای تصادفی تشکیل‌دهندهٔ آن است.

به‌بیان ریاضی: اگر $X_1, X_2, \ldots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع نمایی و پارامترهای $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ و همچنین $X=\min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ باشد،

$$P(X>x)=P(\min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}>x)$$

از طرف دیگر، اگر حداقل چند متغیر تصادفی، از عددی مانند $x$ کوچکتر نباشد، بدیهی است که هر کدام از این متغیرهای تصادفی نیز از این عدد کوچکتر نخواهد بود. بنابراین،

$$P(\min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}>x)=P(X_1>x, X_2>x, \ldots, X_n>x)$$

و چون فرض شده است که متغیرهای تصادفی مورد بحث مستقل‌اند،

$$P(X>x)=P(X_1>x)P(X_2>x)\cdots P(X_n>x)=e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)x}$$

این خاصیت را می‌توان در مورد الگوی ورود مشتریان نیز در نظر گرفت. فرض کنید که سیستم دارای $n$ نوع مشتری و زمان بین دو ورود متوالی هر نوع مشتری نیز متغیر تصادفی با توزیع نمایی باشد. در این‌صورت، زمان بین دو ورود متوالی مشتریها (صرف‌نظر از نوع مشتری)، برابر با حداقل زمانهای بین دو ورود مشتریهای مختلف



خواهد بود، که طبق خاصیت فوق، متغیر تصادفی با توزیع نمایی است.

**مثال ۳.۳** سیستم صفی را در نظر بگیرید که دو خدمت‌دهنده داشته باشد. مدت زمان خدمت، متغیری تصادفی با توزیع نمایی است. میانگین خدمت توسط خدمت‌دهندهٔ اولی را ۱۰ دقیقه و توسط دومی را ۱۵ دقیقه فرض می‌کنیم. یک مشتری جدید وارد سیستم می‌شود. در زمان ورود او هر دو خدمت‌دهنده مشغول بوده‌اند و در صف نیز مشتری دیگری وجود ندارد. چنانچه در لحظهٔ ورود این مشتری جدید، ۱۲ دقیقه از زمان ارائهٔ خدمت توسط خدمت‌دهندهٔ شمارهٔ ۱ و ۸ دقیقه از خدمت شمارهٔ ۲ گذشته باشد، به‌سؤالات زیر جواب دهید؟

الف. احتمال اینکه مشتری جدید حداکثر ۳ دقیقه در صف منتظر بماند، چقدر است؟

ب. میانگین مدت زمان انتظار مشتری در صف را حساب کنید.

حل: براساس میانگین مدت زمان خدمت، پارامترهای متغیر تصادفی نمایی برای خدمت‌دهندهٔ اول برابر با ۱/۱۰ و برای دومی برابر با $\frac{1}{15}$ خواهد بود. با استفاده از خاصیت الف، (بدون حافظه بودن توزیع نمایی)، می‌توانیم فرض کنیم که خدمت‌دهندگان از لحظهٔ ورود مشتری جدید کار خود را شروع کرده‌اند. بنابراین، مبدأ زمان را همین لحظه در نظر می‌گیریم. اما، مدت زمانی که مشتری جدید در صف صرف می‌کند، متغیر تصادفی $X$ برابر با حداقل مدت زمان ارائهٔ خدمت توسط خدمت‌دهندگان ۱ و ۲ است. لذا، متغیر تصادفی $X$، طبق خاصیت ب، دارای توزیع نمایی با پارامتر مجموع پارامترها، یعنی ۱/۶ است. پس،

$$P(X>3)=1-e^{-(1/6)(3)}=1-e^{-0.5}$$

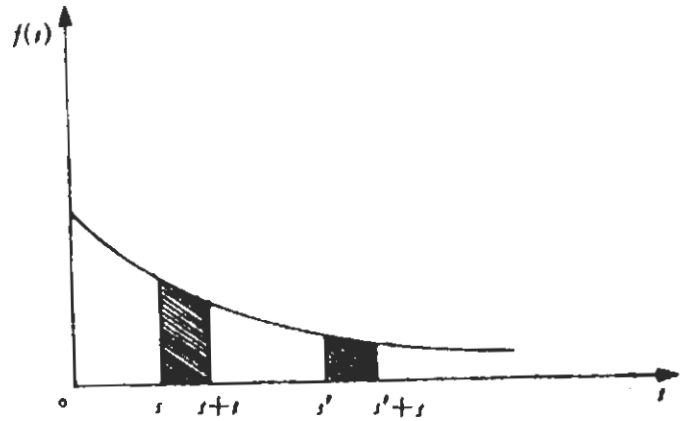
$$E(X)=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}=6 \text{ دقیقه}$$

بنابراین، مشتری باید ۶ دقیقه در صف منتظر بماند. درحالی که اگر در سیستم فقط خدمت‌دهندهٔ اول کار می‌کرد، می‌بایست ۱۰ دقیقه صبر می‌کرد. (و اگر فقط خدمت‌دهندهٔ دوم کار می‌کرد، به ۱۵ دقیقه وقت نیاز بود).

**ج. نزولی بودن تابع چگالی**

این خاصیت از روی منحنی به‌وضوح مشخص است. برای روشن شدن این خاصیت، دو زمان $s$ و $s'$ را در نظر بگیرید (که $s<s'$). احتمال وقوع یک پیشامد، در فاصلهٔ $(s, s+t)$ از احتمال وقوع همان پیشامد در فاصلهٔ $(s', s'+t)$ بیشتر است (در هر دو حالت $t$ یکسان فرض می‌شود). این موضوع در شکل ۳.۳ نشان داده شده است.

مثال عددی زیر به‌روشن شدن موضوع کمک می‌کند. محاسبات مربوط به توزیع نمایی با میانگین یک است




**شکل ۳.۳** نزولی بودن تابع چگالی متغیر تصادفی نمایی

$$P\left(0 \leqslant X \leqslant \frac{1}{2}\right) = 0{,}393$$

$$P\left(\frac{1}{2} \leqslant X \leqslant 1\right) = 0{,}238$$

$$P\left(1 \leqslant X \leqslant \frac{3}{2}\right) = 0{,}145$$

$$P\left(\frac{3}{2} \leqslant X \leqslant 2\right) = 0{,}088$$

$$P(2 \leqslant X \leqslant 2{,}5) = 0{,}053$$

براساس محاسبات فوق، یك متغیر تصادفی با توزیع نمایی مقادیر کوچك را با احتمال زیاد و مقادیر بزرگتر را با احتمال کمتر انتخاب می‌کند. در این مثال، احتمال انتخاب مقادیر کوچکتر از مقدار میانگین، بیش از ۰٫۶۳۱ است، درحالی که احتمال انتخاب مقادیر بیش از آن کمتر از ۰٫۳۶۹ خواهد بود.

از این خاصیت بدین ترتیب استفاده می‌کنند که درصورتی می‌توان گفت که مدت خدمت‌دهی دارای توزیع نمایی است که احتمال طولانی بودن مدت خدمت کم باشد و دفعات بیشتر خدمتها درمدتی کوتاه (در مقایسه با میانگین) به‌اتمام برسد. به‌این‌ترتیب، اگر در سیستمی، مدت خدمت‌دهی ثابت و یا تقریباً ثابت باشد، نمی‌توان گفت که خدمت‌دهی با توزیع نمایی انجام می‌شود.

یکی دیگر از مواردی که می‌توان مدت خدمت‌دهی را، طبق این خاصیت، متغیری



تصادفی با توزیع نمایی دانست، به شرح زیر است:

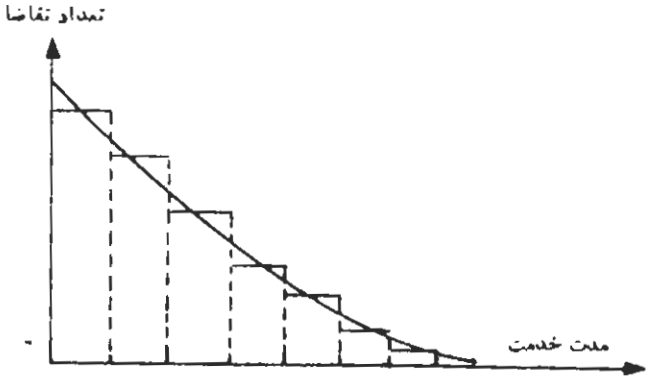
سیستمی را در نظر بگیرید که دارای انواع مختلف مشتری (مثلاً n نوع) باشد. با مراجعه به‌شکل ۴.۳، فرض کنید که تعداد مشتریهای نوع ۱ زیاد ولی مدت خدمت‌دهی به‌آنان کوتاه (وتقریباً ثابت)؛ تعداد مشتریهای نوع ۲ تا حدی کمتر ولی مدت‌خدمت‌دهی به‌آنان بیشتر، و همین‌طور تا مشتریان نوع nام که تعدادشان خیلی کم و مدت‌ارائهٔ‌خدمت به‌آنان طولانی است. دراین‌صورت، منحنی حاصل معرف مقدار تقاضا ومدت خدمت‌دهی خواهد بود، که با تقریب کافی، نشاندهندهٔ متغیری تصادفی با توزیع نمایی است. مثلاً، بیمارستانی را در نظر بگیرید. معمولاً، تقاضا برای خدمات کوتاه مدت مانند تزریقات و پانسمان زیاد، ولی برای خدمات طولانی مانند جراحی توأم با بستری شدن کمتر است.

یك مکالمهٔ تلفنی را در نظر بگیرید. درصدی بالا از مکالمات کوتاه و درصد کمی از آنها طولانی هستند. درنتیجه، رابطهٔ بین تعداد و مدت خدمت معمولاً با الگوی شکل ۴.۳ تطابق دارد و لذا می‌توان گفت که مدت زمان مکالمه، متغیر تصادفی نمایی است.

**د. در توزیع نمایی، احتمال وقوع پیشامد در زمان کوتاه $\Delta t$ تقریباً برابر با $\lambda \Delta t$ است**

یعنی چنانچه تا لحظهٔ مشخصی پیشامد مورد نظر بسه‌وقوع نپیوسته باشد، احتمال اتفاق افتادن آن در فاصلهٔ کوتاه $\Delta t$ متناسب با $\lambda$ است. به‌زبان ریاضی

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(X \leqslant x + \Delta t \mid X > x)}{\Delta t} = \lambda \qquad (۱۵.۳)$$




**شکل ۴.۳** حالتی که انواع مختلف مشتری با زمانهای مختلف خدمت‌دهی وجود دارد

$\lambda\Delta t$

این خاصیت را به‌شرح زیر می‌توان اثبات کرد.

$$P(X \leqslant x+\Delta t \mid X > x) = P(X \leqslant \Delta t) = 1 - e^{-\lambda \Delta t}$$

$$= 1 - \left[1 - \lambda\Delta t + \frac{(\lambda\Delta t)^2}{2!} - \frac{(\lambda\Delta t)^3}{3!} + \dots\right] = \lambda\Delta t + O(\Delta t)$$

(در عبارت فوق، ابتدا از خاصیت بدون حافظه بودن توزیع نمایی و سپس از بسط $e^x$ استفاده شده است). منظور از $O(x)$ مجموعهٔ توابعی است که به‌ازای $x$های کوچک، یک بینهایت کوچک درجه دوم به‌بالا هستند. به‌زبان ریاضی

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{O(\Delta x)}{\Delta x} = 0 \qquad (16.3)$$

به‌عنوان نمونه، تابع $x^2$ از نوع $O(x)$ است، درحالی که تابع $x$ شامل این مجموعه نمی‌شود.

براساس خاصیت «د»، می‌توان نتیجه‌گیری کرد که در فرایند پواسون احتمال اینکه در یک فاصلهٔ کوتاه زمانی $\Delta t$، همزمان دو پیشامد اتفاق بیفتد، بینهایت کوچک درجه دوم است. بنابراین، هیچ‌گاه دو پیشامد همزمان به‌وقوع نمی‌پیوندد.

### ورود کاملا تصادفی

با توجه به‌قضیهٔ فوق، ورود پواسون را گاهی **ورود کاملا تصادفی** هم می‌گویند، زیرا احتمال ورود یک مشتری در فاصلهٔ کوتاه $\Delta t$ مستقل از زمان گذشته است و فقط بستگی به‌مدت $\Delta t$ و $\lambda$ دارد.

## ۳.۳ فرایند شمارشی

این فرایند معرف تعداد پیشامدهایی است که تا لحظهٔ معینی اتفاق افتاده‌است. در حالت کلی، چنانچه $\{N(t), t \geqslant 0\}$ معرف یک فرایند شمارشی باشد، به‌ازای $t \geqslant 0$، $N(t)$ نشاندهندهٔ تعداد پیشامدهایی است که از لحظهٔ صفر تا $t$ صورت گرفته است. نمونه‌های فرایندهای شمارشی عبارت‌اند از:

- تعداد حوادث رانندگی که در یک شهر و در مدتی معین اتفاق می‌افتد.
- تعداد بچه‌هایی که در مدت معینی در یک بیمارستان متولد می‌شوند.
- تعداد مشتریانی که تا لحظهٔ $t$ وارد یک سیستم صف‌شده و یا از آن خارج‌شده‌اند.

براساس این تعریف، $N(t)$ فقط می‌تواند اعداد صحیح غیرمنفی را انتخاب کند. ضمنا فرایند شمارشی تابعی افزاینده (برحسب $t$) است، یعنی به‌ازای $t < t'$ داریم:



$$N(t) \leqslant N(t')$$

از طرف دیگر، تعداد پیشامدهایی که بین $t$ و $t'$ اتفاق می‌افتد، برابر با $N(t') - N(t)$ خواهد بود. ضمناً فرض می‌کنیم که $N(0) = 0$، یعنی شمارش پیشامدها از لحظهٔ صفر شروع شود.

در یک فرایند شمارشی، ممکن است خاصیت رشد مستقل وجود داشته باشد. معنای این خاصیت این است که تعداد پیشامدهایی که در یک فاصلهٔ زمانی معین رخ می‌دهد (یا به‌عبارت دیگر، مقدار رشد $N(t)$ در این فاصله)، مستقل از تعداد پیشامدهایی است که در یک فاصلهٔ زمانی دیگر اتفاق می‌افتد (به‌فرض اینکه این دو فاصلهٔ زمانی غیرمشترک باشند). مثلا، در یک سیستم صف، خاصیت رشد مستقل در الگوی ورود مشتری آن بدین معناست که تعداد مشتریهایی که فرضاً بین ساعت ۹ تا ۱۰ وارد می‌شوند ارتباطی با تعداد مشتریهایی که قبلا، مثلا از ساعت ۸ تا ۹ وارد شده‌اند، ندارد.

خاصیت دیگری که در یک فرایند شمارشی می‌تواند وجود داشته باشد، خاصیت رشد ثابت است. معنای این خاصیت آن است که تعداد پیشامدهایی که در فاصلهٔ زمانی معینی پیش می‌آید، مستقل از زمان وقوع آنهاست و فقط بستگی به طول مدت آن دارد. مثلا، اگر خاصیت رشد ثابت در الگوی ورود مشتری به یک سیستم صف صدق کند، تعداد مشتریهایی که مثلا از ساعت ۸ تا ۹ وارد می‌شوند، با تعداد مشتریانی که در هر ساعت دیگر، مثلا ۱۱ تا ۱۲ وارد می‌شوند، تابع توزیع یکسانی دارد. اما، اگر در یک سیستم، ورود مشتریها در زمانهای مختلف متفاوت باشد، دیگر خاصیت رشد ثابت صدق نمی‌کند. مثلا در یک جایگاه فروش بنزین، میانگین تعداد مشتریهای مراجعه‌کننده (اتومبیلها) از ساعت ۸ تا ۹ خیلی بیشتر از میانگین تعداد مشتریهایی است که بین ساعات ۲۲ تا ۲۳ مراجعه کنند.

## ۴.۳ فرایند پواسون

فرایند پواسون حالت خاصی از فرایند شمارشی محسوب می‌شود.

**تعریف.** فرایند شمارشی $\{N(t), t \geqslant 0\}$ را فرایند پواسون با پارامتر $\lambda$ می‌نامند، اگر تعداد پیشامدهایی که در فاصلهٔ زمانی $t$، مثلا از زمان $s$ تا زمان $s+t$ اتفاق می‌افتد، طبق توزیع پواسون و (به‌ازای تمام مقادیر $s$ و $t$)، به‌شرح زیر باشد

$$P[N(t+s) - N(s) = n] = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} \qquad (17.3)$$

ضمناً فرض می‌کنیم که خاصیت رشد مستقل نیز وجود داشته باشد.

براساس تعریف فوق، خاصیت رشد ثابت نیز مسلماً وجود خواهد داشت، زیرا رابطهٔ فوق به‌ازای تمام مقادیر $s$ و $t$ صادق است. درنتیجه:

$$P[N(s+t)-N(s)=n]=P[N(t)=n]=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} \qquad (۱۸.۳)$$

در اینجا لازم است که به تفاوت فرایند پواسون و توزیع پواسون نیز اشاره شود. در توزیع پواسون تنها پارامتر $\lambda$ مطرح است. درحالی که درفرایند پواسون علاوه‌براین پارامتر، با زمان ($t$) نیز سروکار داریم. اگر در توزیع پواسون به‌جای پارامتر $\lambda$، $\lambda t$ را قرار دهیم، فرایند پواسون به‌دست می‌آید. از طرف دیگر، به‌ازای مقدار ثابتی از $t$، مقدار $\lambda t$ نیز ثابت خواهد بود و فرایند پواسون به‌توزیع پواسون تبدیل می‌شود.

### میانگین و واریانس در فرایند پواسون

اگر $N(t)$ معرف فرایند پواسون باشد،

$$E[N(t)]=\sum_{n=0}^{\infty} nP(N(t)=n)=\sum_{n=0}^{\infty} ne^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}=\lambda t \qquad (۱۹.۳)$$

(در محاسبهٔ فوق از بسط سری $e^x$ استفاده شده است). همان‌طور که مشاهده می‌شود، میانگین تعداد پیشامدها بستگی مستقیم به زمان دارد. در واقع، $\lambda$ معرف میانگین تعداد پیشامدها درواحدزمان است. برای محاسبهٔ واریانس، ابتدا $E[N^2(t)]$ را حساب می‌کنیم.

$$E[N^2(t)]=\sum_{n=0}^{\infty} n^2e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}=(\lambda t)^2+\lambda t \qquad (۲۰.۳)$$

درنتیجه

$$\mathrm{var}[N(t)]=\{E[N(t)]\}^2-E[N^2(t)]=(\lambda t)^2-(\lambda t)^2+\lambda t=\lambda t \qquad (۲۱.۳)$$

لازم به‌یادآوری است که می‌توان میانگین و واریانس را با استفاده از تابع مولدگشتاور به‌دست آورد. تابع مولدگشتاور فرایند پواسون عبارت است از:

$$M_{X(t)}(s)=e^{\lambda t(e^s-1)}$$

$M_{N(t)}=$

## ۵.۳ رابطهٔ بین فرایند پواسون و توزیع نمایی

فرض کنید که تعداد پیشامدها طبق فرایند پواسون باشد. اگر اولین پیشامد در زمان $s_1$، دومی در $s_2$ و بالاخره $n$امین پیشامد در زمان $s_n$ صورت گیرد و زمانهای بین دو پیشامد را به‌ترتیب $T_1, T_2, \ldots, T_n$ بنامیم، یعنی $T_1=S_1$ و $T_2=S_2-S_1$ و $T_n=s_n-s_{n-1}$ باشد. در این‌صورت می‌توان ثابت کرد که $T_1, T_2, \ldots, T_n$ متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع نمایی هستند. پارامتر این متغیرهای تصادفی همان پارامتر فرایند پواسون





خواهد بود. اثبات ریاضی این موضوع به‌شرح زیر است.

ابتدا نشان خواهیم داد که $T_1$ دارای توزیع نمایی با پارامتر $\lambda$ است، زیرا

$$P(T_1>x)=P(X \text{ زمان تا پیشامدی هیچ ندادن روی})=P[N(x)=0]=e^{-\lambda x}$$

در مرحلهٔ بعد، بااستفاده از روابط زیر، نمایی بودن $T_2$ اثبات می‌شود.

$$P(T_2>x|T_1=s)=P(s+x \text{ تا } s \text{ فاصلهٔ زمانی درپیشامد هیچ ندادن روی}|T_1=s)$$

$$=P(s+x \text{ تا } s \text{ فاصلهٔ زمانی درپیشامدی هیچ ندادن روی})=e^{-\lambda x}$$

(در رابطهٔ فوق، تساوی دوم از خاصیت رشدثابت ناشی می‌شود). به‌همین‌ترتیب، می‌توان همین خاصیت را برای $T_3$ و $T_4$ و ... نشان داد.

بنابراین، می‌توان گفت که فرایند پواسون و توزیع نمایی دو روی یك سکه‌اند. فرایند پواسون تعداد پیشامدها را مشخص می‌کند و توزیع نمایی فاصلهٔ بین دو پیشامد متوالی را نشان می‌دهد. مثلاً، دریك سیستم‌صف، اگر ورود مشتریها طبق فرایند پواسون باشد، می‌توان گفت زمان بین دو ورود متوالی مشتریها براساس توزیع نمایی است. عکس این موضوع نیز صادق است.

**مثال ۴.۳** مشتریهای یك‌بانك براساس فرایندپواسون مراجعه می‌کنند. درهر ساعت، به‌طورمتوسط ۱۰ نفر مشتری وارد می‌شوند. پس‌از باز شدن بانك درصبح، احتمال اینکه در ۱۵ دقیقهٔ اول کسی مراجعه نکند، چقدراست؟ احتمال اینکه بین ورود هفتمین وهشتمین مشتری وقفه‌ای حداقل برابر یك ساعت پیش بیاید، چقدر است؟

حل: پارامتر فرایند پواسون عبارت است از $\lambda=10$. طبق بحث فوق، زمان بین دو ورود متوالی مشتریها طبق توزیع نمایی با پارامتر پواسون (۱۰) است. بنابراین،

$$P(T_1>0.25)=e^{-(10)(0.25)}=e^{-2.5}$$

$$P(T_8>1)=e^{-10}$$

(در رابطه‌های فوق، $T_1$ معرف زمان ورود اولین مشتری و $T_8$ معرف زمان بین ورود هفتمین و هشتمین مشتری است و ضمناً ۱۵ دقیقه به ۰٫۲۵ ساعت تبدیل شده است).

ارتباط بین فرایند پواسون و توزیع نمایی را به‌صورت ساده‌تر نیز می‌توان نشان داد. اگر تعداد پیشامدها براساس فرایند پواسون باشد، در هر لحظه طبق خاصیت رشد مستقل، پیشامدهای‌ازآن‌لحظه به‌بعد را می‌توان مستقل از گذشته فرض کرد. به‌عبارت‌دیگر، مبدأ زمان را می‌توان همین لحظه در نظر گرفت. بدین ترتیب، زمان پیشامد بعدی،متغیری تصادفی است که فاقد حافظه است. ضمناً میانگین تعداد پیشامدها از این لحظه تا $t$ برابر با $\lambda t$ است، که با خاصیت «ده» توزیع نمایی تطبیق‌می‌کند. بنابراین، زمان بین دوپیشامد متوالی هم متغیری تصادفی با توزیع نمایی است.

## ۶.۳ خواص فرایند پواسون

**قضیهٔ ۲.۳** اگر $N_1(t)$ و $N_2(t)$ فرایندهای پواسون با پارامترهای به ترتیب $\lambda_1$ و $\lambda_2$ باشند، در این‌صورت فرایند $N(t)=N_1(t)+N_2(t)$ نیز فرایند پواسون، با پارامتر $\lambda=\lambda_1+\lambda_2$ خواهد بود.

**اثبات:** می‌خواهیم ثابت کنیم که $P(N(t)=n)=e^{-\lambda t}(\lambda t)^n/n!$. برای نشان‌دادن این موضوع از تابع مولد گشتاور استفاده می‌کنیم. می‌دانیم که

$$M_{N(t)}(s)=M_{N_1(t)}(s)\cdot M_{N_2(t)}(s) \qquad (۲۲.۳)$$

اما تابع تولید گشتاور این فرایند، همان‌طور که قبلاً گفته شد، عبارت است از:

$$M_{N(t)}(s)=\{e^{\lambda_1 t(e^s-1)}\}\{e^{\lambda_2 t(e^s-1)}\}=e^{\lambda t(e^s-1)}$$

که تابع مولد گشتاور فرایند پواسون با پارامتر $\lambda=\lambda_1+\lambda_2$ است.

از این قضیه می‌توان نتیجه‌گیری کرد که اگر سیستمی دارای $n$ نوع مشتری باشد، و هر نوع مشتری، مستقل از سایر مشتریها و براساس فرایند پواسون وارد سیستم شود، ورود کل مشتریها نیز مجموعاً براساس فرایند پواسون خواهد بود. این موضوع قبلاً در هنگام بحث دربارهٔ توزیع نمایی (خاصیت ب) نیز مطرح شد (ارتباط بین این دو موضوع را به‌صورت تمرین نشان دهید).

**قضیهٔ ۳.۳** سیستمی را درنظر بگیرید که ورود مشتریها به آن براساس فرایند پواسون، $N(t)$ و دارای پارامتر $\lambda$ است. مشتریها از دو نوع ۱ و ۲ هستند. هر مشتری با احتمال $P$ از نوع ۱ و با احتمال $1-P$ از نوع ۲ است. اگر تعداد مشتریهای نوع ۱ که وارد سیستم می‌شوند را با $N_1(t)$ و نوع ۲ را با $N_2(t)$ نشان دهیم، $N_1(t)$ و $N_2(t)$ نیز به‌صورت فرایند پواسون و مستقل از یکدیگر خواهند بود. پارامتر فرایند اولی $\lambda P$ و دومی $\lambda(1-P)$ است.

**اثبات:** می‌خواهیم ثابت کنیم که

$$P[N_1(t)=n]=e^{-(\lambda P)t}\frac{(\lambda Pt)^n}{n!} \qquad (۲۳.۳)$$

برای محاسبهٔ این احتمال، پیشامد مورد نظر را مشروط به تعداد کل مشتریهای وارد شده می‌کنیم.

$$P[N_1(t)=n]=\sum_m P[N_1(t)=n|N(t)=m]P[N(t)=m] \qquad (۲۴.۳)$$

اما، احتمال اینکه تا زمان $t$ کلاً $n$ مشتری از نوع ۱ وارد شده باشد، درحالی‌که جمعاً $m$ مشتری وارد سیستم شده است، براساس توزیع دوجمله‌ای است.



$$P[N_1(t)=n|N(t)=m]=\binom{m}{n}P^n(1-P)^{m-n}$$

بنابراین

$$P[N_1(t)=n]=\sum_{m=n}^{\infty}\binom{m}{n}P^n(1-P)^{m-n}e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^m}{m!}$$

$$=\frac{P^n}{n!}(\lambda t)^n e^{-\lambda t}\sum_{m=n}^{\infty}\frac{(1-P)^{m-n}}{(m-n)!}(\lambda t)^{m-n}$$

سری فوق بسط سری از نوع $e^x$ است، پس

$$P[N_1(t)=n]=\frac{P^n}{n!}(\lambda t)^n e^{-\lambda t}e^{\lambda t(1-P)}=e^{-\lambda Pt}\frac{(\lambda Pt)^n}{n}$$

**مثال ۵.۳** مثال شمارهٔ ۴.۳ را مجدداً در نظر بگیرید. اگر هر مشتری با احتمال ۰٫۸ مرد باشد، به‌سؤالات زیر پاسخ دهید.

احتمال اینکه در ۱۵ دقیقهٔ اول باز شدن بانک در صبح، هیچ مردی مراجعه نکند، چقدر است؟

احتمال اینکه بین ورود دهمین زن و یازدهمین زن بیش از یک ساعت فاصله بیفتد، چقدر است؟

حل: طبق قضیهٔ فوق، ورود مشتریان مرد و همچنین ورود مشتریان زن طبق فرایند پواسون است. میانگین تعداد مشتریان مردی که در یک ساعت مراجعه می‌کنند، برابر با $(۱۰)(۰٫۸)=۸$ و میانگین تعداد مشتری‌زن برابر با $(۱۰)(۰٫۲)=۲$ است. بنابراین اگر $T_i$ و $T'_i$ به‌ترتیب معرف زمانهای بین دو ورود مشتری مرد و زن باشد،

$$P(T_1>0.25)=e^{-(8)(0.25)}=e^{-2}$$

$$P(T'_{11}>1)=e^{-(2)(1)}=e^{-2}$$

**مثال ۶.۳** مثال شمارهٔ ۴.۳ را مجدداً در نظر بگیرید. میانگین زمان ورود مشتری دهم چقدر است؟

حل: چون

$$S_{10}=T_1+T_2+\cdots+T_{10}$$

و از طرف دیگر می‌دانیم که $T_i$ها دارای توزیع نمایی و مستقل هستند، لذا

$$E(S_{10})=10E(T_1)=10(0.1)=1$$

**قضیهٔ ۳.۳** فرایند شمارشی $\{N(t), t \geqslant 0\}$، با مشخصات زیر، یك فرایند پواسون با پارامتر $\lambda$ است

الف. $N(0)=0$

ب. دارای خاصیتهای رشد مستقل باشد (یعنی تعداد پیشامدها در فواصل زمانی مجزا، مستقل از یکدیگر باشد)

ج. احتمال وقوع یك پیشامد در فاصلهٔ کوتاه $s$ متناسب با این فاصله باشد، یعنی $P[N(s)=1]=\lambda s+o(s)$

د. احتمال وقوع بیش از یك پیشامد در فاصلهٔ کوتاه $s$ وجود نداشته باشد، یعنی $P[N(s)\geqslant 2]=o(s)$ (همان‌طور که قبلا گفتیم، منظور از $o(x)$ تابعی بینهایت کوچك از درجهٔ ۲ است، یعنی

$$\lim_{x\to 0}\frac{o(x)}{x}=0$$

اثبات: برای سهولت محاسبات از قرارداد زیر استفاده می‌کنیم.

$$P_n(t)=P[N(t)=n] \qquad (۲۵.۳)$$

بدین‌ترتیب، $P_n(t)$ معرف احتمال وقوع $n$ پیشامد تا لحظهٔ $t$ است. برای اینکه نشان دهیم فرایند مورد نظر پواسون است، باید ثابت کنیم که

$$P_n(t)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

برای این منظور از معادلات دیفرانسیل به‌شرح زیر استفاده می‌کنیم. ابتدا $P_n(t)$ را با بهره‌گیری از خاصیت امید شرطی محاسبه می‌کنیم:

$$P_n(t+s)=P[N(t+s)=n]=\sum_{m=0}^{\infty}P[N(t+s)=n|N(t)=m]$$
$$P[N(t)=m]$$

رابطهٔ فوق را می‌توان به‌صورت زیر نشان داد:

$$\begin{aligned}P_n(t+s)=&\sum_{m=0}^{n-2}P[N(t+s)=n|N(t)=m]P_m(t)\\&+P[N(t+s)=n|N(t)=n-1]P_{n-1}(t)\\&+P[N(t+s)=n|N(t)=n]P_n(t)\\&+\sum_{m=n+1}^{\infty}P[N(t+s)=n|N(t)=m]P_m(t)\end{aligned}$$



اما طبق فرضهای ب و ج رابطه‌های زیر را داریم. اگر $m\leqslant n-2$ باشد:

$$P[N(t+s)=n|N(t)=m]=P[\text{وقوع بیش از یك پیشامد در مدت زمان } s]=o(s)$$

و همچنین

$$P[N(t+s)=n|N(t)=n-1]$$
$$=P[\text{وقوع دقیقاً یك پیشامد در مدت زمان } s]=\lambda s+o(s)$$

و

$$P[N(t+s)=n|N(t)=n]=P[\text{وقوع هیچ پیشامد در فاصلهٔ زمانی } s]$$
$$=1-P[\text{وقوع یك پیشامد یا بیشتر در فاصلهٔ زمانی } s]=1-\lambda s+o(s)$$

پس از جایگزینی عبارات فوق و در نظر گرفتن اینکه مجموع چند تابع $o(s)$ نیز تابعی به‌شکل $o(s)$ خواهد بود، رابطهٔ زیر را به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{P_n(t+s)-P_n(t)}{s}=\lambda P_{n-1}(t)-\lambda P_n(t)+\frac{o(s)}{s}$$

در حد، موقعی که $s$ به‌سمت صفر میل می‌کند و با در نظر گرفتن مفهوم مشتق تابع، رابطهٔ زیر نتیجه می‌شود

$$P'_n(t)=\lambda P_{n-1}(t)-\lambda P_n(t) \quad , \quad n=0,1,2,\dots \qquad (۲۶.۳)$$

برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل (۲۶.۳)، ابتدا $P_0(t)$ را محاسبه می‌کنیم و آن‌گاه نتیجه را برای محاسبهٔ $P_1(t)$ به‌کار می‌گیریم. این‌کار را ادامه می‌دهیم تا جواب سایر معادلات نیز به دست آید. بنابراین

$$P'_0(t)=-\lambda P_0(t)$$

در نتیجه

$$P_0(t)=Ke^{-\lambda t}$$

از شرط اولیه $P_0(0)=1$ استفاده می‌کنیم. در نتیجه

$$P_0(t)=e^{-\lambda t} \qquad (۲۷.۳)$$

که معرف فرایند پواسون است. در حالت کلی به‌ازای $n=1,2,$، رابطهٔ (۲۵.۳) را می‌توان به‌شکل زیرهم نشان داد.

$$e^{\lambda t}[P'_n(t)+\lambda P_n(t)]=\lambda e^{\lambda t}P_{n-1}(t)$$

در نتیجه،

$$\frac{d}{dt}[e^{\lambda t}P_n(t)]=\lambda e^{\lambda t}P_{n-1}(t) \qquad (۲۸.۳)$$

اکنون، با استفاده از روش استقرا می‌توان قضیه را ثابت کرد. یعنی فرض می‌کنیم که به‌ازای $(n-1)$، فرایند موردبحث پواسون است، پس،

$$P_{n-1}(t)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \qquad (۲۹.۳)$$

حال، می‌توان از روابط (۲۷.۳) و (۲۸.۳) نتیجه گرفت که

$$\frac{d}{dt}[e^{\lambda t}P_n(t)]=\lambda^n\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \qquad (۳۰.۳)$$

یا

$$P_n(t)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}+C$$

از شرط اولیه $P_n(0)=0$ استفاده می‌کنیم. $C=0$ به‌دست می‌آید و قضیه ثابت می‌شود.

**قضیهٔ ۵.۳** (تابع توزیع زمان ورود مشتری، مشروط بر اینکه تعداد مشتریهای وارد شده معلوم باشد).

فرض کنید که ورود مشتریها براساس فرایند پواسون است. اگر بدانیم که در فاصلهٔ $(0, t)$ دقیقاً یک مشتری وارد شده است (ولی نمی‌دانیم که در چه لحظه‌ای وارد شده است)، تابع توزیع ورود او براساس متغیر تصادفی یکنواخت (در همین فاصله) خواهد بود.

اثبات: اگر $T$ معرف زمان ورود این مشتری باشد.

$$P[T\leq x|N(t)=1]=\frac{P[T\leq x, N(t)=1]}{P[N(t)=1]} \qquad (۳۱.۳)$$

$=P($ورود نشدن هیچ مشتری در فاصلهٔ زمانی $x$ تا $t$، و وارد شدن یک مشتری در فاصلهٔ زمانی $0$ تا $x)$

$$=\frac{e^{-\lambda x}(\lambda x)e^{-\lambda(t-x)}}{e^{-\lambda t}(\lambda t)}=\frac{x}{t}$$

قضیهٔ فوق را می‌توان تعمیم داد. اگر بدانیم تا لحظهٔ مشخصی دقیقاً $n$ نفر وارد سیستم شده‌اند، می‌توان فرض کرد که هر مشتری طبق توزیع یکنواخت وارد شده است و ورود مشتریهای مختلف مستقل از یکدیگر است.

**مثال ۷.۳** تعداد مشتریهایی که به یک سیستم صف مراجعه می‌کنند، به‌صورت توزیع



پواسون با میانگین ۵ در ۵ مشتری در ساعت است. اگر در سه ساعت اول دو مشتری مراجعه کرده باشند، احتمال اینکه هر دو مشتری در ساعت اول آمده باشند، چقدر است؟

حل: طبق قسمهٔ ۵.۳، هر کدام از این دو مشتری، براساس توزیع یکنواخت، در فاصلهٔ سه ساعت مراجعه کرده‌اند. بنابراین، احتمال ورود هر مشتری در ساعت اول یک‌سوم و احتمال ورود هر دو مشتری در ساعت اول یک‌نهم است.

## ۷.۳ تابع توزیع ارلانگی

به علت اهمیت نقش **تابع توزیع ارلانگی** (ماگاما) در سیستمهای صف، در این بخش به تعریف و بررسی خواص آن می‌پردازیم.

در فصول بعدی خواهیم دید که ساده‌ترین مدلهای صف آنهایی هستند که براساس متغیر تصادفی نمایی ساخته شده‌اند. خاصیت بدون حافظه بودن این متغیر تصادفی، حل مدلهای نمایی را بسیار آسان می‌سازد. بنابراین، بدیهی است که حتی‌الامکان سعی می‌شود مسائل صف در چارچوب مدلهای نمایی فرموله شوند. با وجود این، مسلماً همهٔ آنها را نمی‌توان در این قالب جا داد. متغیرهای تصادفی، نظیر مدت زمان خدمت و یا زمان بین دو ورود مشتریها در سیستمهای صف، از توابع توزیع متنوعی پیروی می‌کنند.

تابع توزیع ارلانگی، اگرچه از نظر سادگی محاسباتی در حد توزیع نمایی نیست، در مقایسه با سایر متغیرهای تصادفی به‌متغیر تصادفی نمایی نزدیکتر است و در مواردی با تبدیل آن به متغیرهای تصادفی نمایی از سهولت محاسباتی خاصیت بدون حافظه بودن استفاده می‌کند. مزیت عمدهٔ آن نسبت به توزیع نمایی این است که در عمل پدیده‌های تصادفی بسیاری را می‌توان برحسب آن بیان کرد.

**تعریف.** متغیر تصادفی $x$ را، که دارای تابع چگالی به شرح زیر باشد، ارلانگی می‌نامند.

$$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^{r-1}}{(r-1)!}, \quad x\geq 0 \qquad (۳۲.۳)$$

$\lambda$ و $r$ پارامترهای ارلانگی و هر دو مقادیر مثبتی هستند. علاوه بر این، $r$ همیشه عدد صحیح است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، این متغیر تصادفی دارای حالت خاص توزیع گاماست، که در آن پارامتر $r$ فقط اعداد صحیح را انتخاب می‌کند. (در توزیع گاما، $r$، هر عدد مثبتی را می‌تواند انتخاب کند؛ بنابراین، چون به‌ازای $r$های غیر عدد صحیح $(r-1)!$ بی‌معناست، به‌جای آن $\Gamma(r)$ به‌کار گرفته می‌شود. در حالت‌های خاص، که $r$ عدد صحیح باشد، مفهوم هر دو عبارت یکسان است.

میانگین متغیر تصادفی ارلانگی برابر با $r/\lambda$ و واریانس آن برابر با $r/\lambda^2$ و تابع مولد گشتاور آن $[\lambda/(\lambda-t)]^r$ است.

**قضیهٔ ۶.۳** مجموع $n$ متغیر تصادفی نمایی مستقل با پارامترهای $\lambda$، یك متغیر تصادفی ارلانگی با پارامترهای ($\lambda$ و $n$) است.

**اثبات:** متغیرهای تصادفی مستقل نمایی $X_1, X_2, \dots, X_n$ را در نظر بگیرید. اگر $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ پارامترهای آنها و $Y$ مجموع آنها باشد، همان‌طور که قبلا گفته شد تابع مولد گشتاور $Y$ برابر با حاصل‌ضرب توابع تولید گشتاور $X_1, X_2, \dots, X_n$ است. یعنی

$$M_Y(t) = M_{X_1}(t) \cdots M_{X_n}(t)$$

از طرف دیگر می‌دانیم که تابع مولد گشتاور $X_i$ برابر $\lambda/(\lambda - t)$ است. بنابراین، تابع مولد گشتاور $Y$ برابر با $(\lambda/\lambda - t)^n$ خواهد بود، که می‌دانیم این تابع مولد گشتاور مربوط به یك متغیر تصادفی ارلانگی با پارامترهای $\lambda$ و $n$ است.

میانگین و واریانس توزیع ارلانگی را از قضیهٔ فوق نیز می‌توان به دست آورد. ازآنجاکه یك متغیر تصادفی ارلانگی با پارامترهای $\lambda$ و $n$ معادل مجموع $n$ متغیر تصادفی مستقل نمایی با پارامتر $\lambda$ است، میانگین و واریانس آنهم $n$ برابر میانگین و واریانس یك‌متغیر تصادفی نمایی است. از این‌راه نیز می‌توان میانگین و واریانس توزیع ارلانگی را محاسبه کرد، که با نتایج قبلی تطبیق می‌کند.

**قضیهٔ ۷.۳** اگر ورود مشتریها براساس فرایند پواسون باشد، زمان ورود مشتری $n$ام، یعنی $s_n$، متغیری تصادفی با توزیع ارلانگی و باپارامترهای $\lambda$ و $n$ است.

**اثبات:** می‌دانیم که $s_n$، زمان ورود مشتری $n$ام، برابر با مجموع فواصل زمانی بین ورودهای متوالی $n$ مشتری است، یعنی

$$S_n = T_1 + T_2 + \cdots + T_n$$

که $T_i$ زمان بین ورود مشتری $(i-1)$ ام و مشتری $i$ام است. چون $T_i$ها مستقل و دارای توزیع نمایی با پارامتر $\lambda$ هستند، لذا طبق قضیهٔ (۶.۳) متغیر تصادفی $s_n$ نیز دارای تابع توزیع ارلانگی خواهد بود.

### اثر تغییرات پارامتر $r$

همان‌طور که گفتیم، متغیر تصادفی ارلانگی با دو پارامتر $\lambda$ و $r$ مشخص می‌شود. از طرف دیگر، این متغیر تصادفی را می‌توان مجموع $r$ متغیر تصادفی نمایی با پارامتر $\lambda$ فرض کرد. حال مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی ارلانگی را در نظر بگیرید که میانگین آنها مقدار ثابت $K$ (یعنی $r/\lambda = K$) باشد. در این‌صورت، با تغییر $r$، پارامتر $\lambda$ نیزمتناسب با آن تغییر می‌کند. به‌عنوان نمونه، اگر $r$ دو برابر شود، $\lambda$ نیز باید دو برابر گردد تا مقدار $K$ ثابت بماند. به‌عبارت دیگر، در چنین حالتی تعداد متغیرهای نمایی دو برابر



می‌شود، اما میانگین هرکدام ازآنها به‌نصف تقلیل می‌یابد. به‌این‌ترتیب، میانگین‌ارلانگی ثابت می‌ماند.

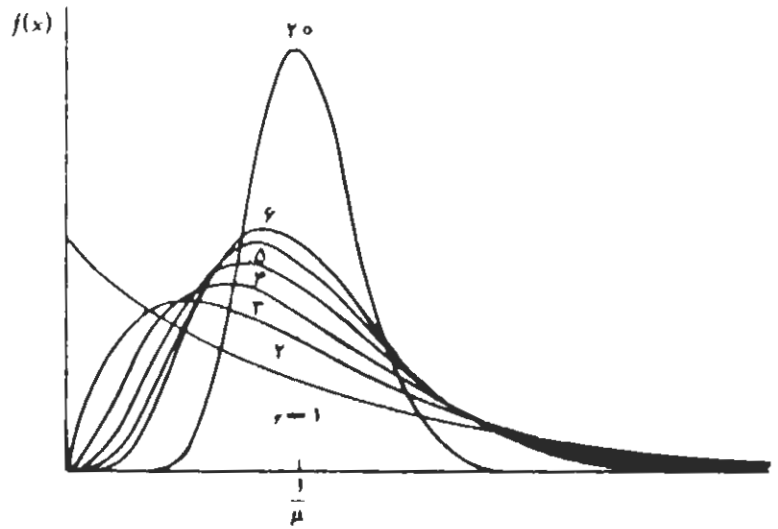
با توجه به مراتب فوق، اثر تغییرات $r$ را برای مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی ارلانگی با میانگین ثابت $K$ بررسی می‌کنیم. درحالتهای خاص، که $r = 1$ است، توزیع ارلانگی به‌نمایی تبدیل می‌شود. با تغییر $r$ توابعی مختلف به‌دست می‌آید،که درشکل ۵.۳ نشان داده شده است. ضمناً طبق قضیه حد مرکزی در احتمالات، موقعی که $r$ افزایش یابد، تابع چگالی (۳۲.۳) به‌سمت تابع چگالی نرمال میل می‌کند.

چنانچه $r = \infty$ اختیارشود، تابع توزیع فوق دیگر ماهیت تصادفی نخواهدداشت و فقط مقداری ثابت، برابر با $K$، اختیار خواهد کرد. این موضوع را می‌توان بااستفاده از رابطهٔ کلی میانگین و واریانس توزیع ارلانگی نشان داد، زیرا در حالت کلی رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\operatorname{var}(X) = \frac{r}{\lambda^2} = \frac{[E(X)]^2}{r} \qquad (۳۳.۳)$$

حال، اگر مقدار میانگین ثابت و برابر با $K$ باشد و $r \to \infty$، واریانس نیز به‌صفر میل می‌کند. می‌دانیم که اگر واریانس یك متغیر تصادفی برابر با صفر باشد، آن متغیر ثابت و قطعی است.

با توجه به‌شکل ۵.۳، مشاهده می‌شود که مجموعهٔ توابع ارلانگی بسیار متنوع‌هستند




شکل ۵.۳ مجموعه توابع چگالی ارلانگی برحسب $r$ و با فرض ثابت بودن میانگین

و می‌توان داده‌های آماری بسیاری‌از متغیرهای تصادفی را با یکی از توابع این‌مجموعه منطبق ساخت. فرض کنید که داده‌های آماری یك متغیر تصادفی، مثلا مدت زمان ارائهٔ خدمت دریك سیستم‌صف دراختیار باشد. از روی این‌داده‌ها می‌توان میانگین و واریانس این متغیر تصادفی را تخمین زد. با توجه به‌متنوع بودن توزیع ارلانگی، امکان زیادی وجود دارد که داده‌های مورد نظر با آن تطبیق کند. یکی از محاسن توزیع ارلانگی، همین خاصیت تنوع آن است که بسیاری از متغیرهای تصادفی واقعی را می‌توان در قالب آن جای داد.

معمولا در جریان حل مسائلی که در آن با متغیر تصادفی ارلانگی سروکار داشته باشیم، با حل انتگرالهای بسیار پیچیده و مفصل برخورد می‌کنیم. با استفاده از قضیهٔ زیر، درمواردی می‌توان محاسبات را ساده‌تر کرد.

**قضیهٔ ۸.۳** تابع توزیع ارلانگی با پارامترهای $\lambda$ و $r$ را از رابطهٔ زیر می‌توان به‌دست آورد:

$$F(x)=1-e^{-\lambda x}\sum_{k=0}^{r-1}\frac{(\lambda x)^k}{k!} \qquad (۳۴.۳)$$

**اثبات:** طبق تعریف، تابع توزیع این متغیر تصادفی عبارت است از:

$$F(x)=P(X\leqslant x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{r-1}}{(r-1)!}\,dt$$

$$=1-\int_x^\infty \lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{r-1}}{(r-1)!}\,dt$$

برای محاسبهٔ انتگرال فوق، از تغییر متغیری به‌شکل $y=t-x$ استفاده می‌کنیم.

$$F(x)=1-\int_0^\infty \lambda^r e^{-\lambda(y+x)}\frac{(y+x)^{r-1}}{(r-1)!}dy \qquad (۳۵.۳)$$

با استفاده از بسط دوجمله‌ای خواهیم داشت:

$$(y+x)^{r-1}=\sum_{k=0}^{r-1}\binom{r-1}{k}x^k y^{r-1-k} \qquad (۳۶.۳)$$

بنابراین، رابطهٔ (۳۵.۳) به‌شکل زیر درمی‌آید:

$$F(x)=1-e^{-\lambda x}\int_0^\infty \lambda^r e^{-\lambda y}\sum_{k=0}^{r-1}\frac{x^k y^{r-1-k}}{(r-1-k)!k!}\,dy \qquad (۳۷.۳)$$

یا



$$F(x)=1-e^{-\lambda x}\sum_{k=0}^{r-1}\frac{(\lambda x)^k}{k!(r-1-k)!}\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda y}(\lambda y)^{r-k-1}dy \qquad (۳۸.۳)$$

انتگرال فوق برابر با $(r-1-k)!$ است؛ زیرا، طبق خاصیت تابع گاما رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\Gamma(\alpha)=\int e^{-u}u^{\alpha-1}du=(\alpha-1)! \qquad (۳۹.۳)$$

(در عبارت فوق $u=\lambda y$ است). به‌این‌ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

**مثال ۸.۳** یك سیستم صف با یك خدمت‌دهنده را درنظر بگیرید. مدت زمان خدمت، نمایی با میانگین ۲۰ دقیقه است. یك مشتری در صف منتظر و خدمت‌دهنده مشغول ارائهٔ خدمت به‌مشتری دیگری است. احتمال اینکه مشتری موردنظر در صف، بیش‌از یك ساعت دیگر در سیستم بماند، چقدر است؟

حل: مدت زمان انتظار این مشتری در سیستم از دو قسمت تشکیل می‌شود. قسمت اول، زمان انتظار او در صف، که برابر با مدت زمان دریافت خدمت مشتری دیگر است و آن‌را با $X_1$ نشان می‌دهیم. قسمت دوم مدت زمانی است که خود او خدمت دریافت می‌کند و با $X_2$ بیان می‌شود؛ بنابراین، اگر مدت زمان ماندن این مشتری در سیستم را با $Y$ نشان دهیم، $Y=X_1+X_2$ خواهد بود. از طرفی چون $X_1$ و $X_2$ متغیرهای تصادفی نمایی هستند، $Y$ یك متغیر تصادفی ارلانگی است. میانگین خدمت توسط یك خدمت‌دهنده ۳ مشتری در ساعت یعنی $\mu=3$ است. لذا $Y$ دارای توزیع ارلانگی با پارامترهای $(2,3)$ است. هدف مسئله، محاسبهٔ $P(Y>1)$ است. طبق قضیهٔ (۸.۳) خواهیم داشت.

$$P(Y>1)=e^{-\mu}\sum_{k=0}^{1}\frac{(\mu)^k}{k!}=e^{-\mu}\left[\frac{(\mu)^0}{0!}+\frac{\mu}{1!}\right]=4e^{-3}$$

## مسائل

۱. مدت تعمیر ماشینی براساس توزیع نمایی و میانگین یك و نیم ساعت است. احتمال اینکه تعمیر این ماشین بیش‌از ۱۲ ساعت طول بکشد چقدر است؟ احتمال اینکه تعمیر ماشین بیش از ۱۲ ساعت طول بکشد، درحالی که می‌دانیم تا این لحظه ۱۱ ساعت طول کشیده، چقدر است؟

۲. در یك آزمایش که ۴ ساعت به‌طول می‌انجامد، از لامپی استفاده می‌شود که عمر آن متغیری تصادفی با میانگین ۵ ساعت است. احتمال اینکه قبل‌از پایان آزمایش، این‌لامپ نسوزد را در چهار حالت زیر حساب کنید:

الف. عمر لامپ دارای توزیع نمایی است، و لامپ، نو است.
ب. عمر لامپ دارای توزیع نمایی است، و لامپ، قبلا ۵ ساعت کار کرده است.
ج. عمر لامپ دارای توزیع یکنواخت (روی فاصلهٔ صفر تا ۱۰ ساعت است)، و لامپ نو، است.
د. عمر لامپ دارای توزیع یکنواخت (روی فاصلهٔ صفر تا ۱۰ ساعت است)، و لامپ قبلا ۵ ساعت کار کرده است.

۳. تعداد تصادفات یك جاده براساس فرایند پواسون است. فرض می‌شود که به‌طور متوسط هر دو ساعت یك بار یك تصادف اتفاق می‌افتد. احتمال اینکه بین ساعت ۸ تا ۸:۲۰ حداقل سه تصادف اتفاق بیفتد، چقدر است؟ احتمال اینکه در ۲۴ ساعت تصادفی نباشد، چقدر است؟

۴. در تعمیرگاهی، دو ماشین الف و ب در حال تعمیر هستند. مدت زمان تعمیر هر دو ماشین، نمایی و دارای میانگین، به‌ترتیب ۲ ساعت و ۳ ساعت است. احتمال اینکه ماشین «ب» زودتر تعمیر شود، چقدر است؟

۵. دو نوع جزوهٔ درسی برای تکثیر به‌چاپخانه فرستاده می‌شود. نوع الف که تعداد نسخهٔ معدودی از آن لازم است، و نوع ب که تعداد زیادی نسخه از آن گرفته می‌شود. تعداد جزوه‌هایی که به‌چاپخانه می‌رسد، براساس فرایند پواسون با میانگین ۱۶ عدد از نوع الف و ۱۵ عدد از نوع ب در هر ساعت است. اگر الان ساعت ۱۰:۳۸ باشد و بدانیم که آخرین جزوهٔ نوع الف در ساعت ۱۰:۲۵ و آخرین جزوهٔ نوع ب در ساعت ۱۰:۱۸ به‌چاپخانه رسیده است،
الف. احتمال اینکه تا ساعت ۱۰:۴۰ سه جزوه به‌چاپخانه برسد، چقدر است؟
ب. احتمال اینکه تا ساعت ۱۰:۴۰ دوجزوهٔ نوع الف و یك جزوهٔ نوع ب برسد، چقدر است؟
ج. احتمال اینکه اولین جزوه‌ای که به‌چاپخانه می‌رسد از نوع الف باشد، چقدر است؟
د. آیا در فاصلهٔ بین آمدن دو جزوهٔ فوق (یعنی در ساعتهای ۱۰:۱۸ و ۱۰:۲۵) ممکن است سه جزوهٔ دیگرهم به‌چاپخانه رسیده باشد؟ احتمال آن چقدر است؟
هـ. اگر تا ساعت ۹ تعداد ۱۲ جزوه از نوع الف رسیده باشد، میانگین کل تعداد جزوه‌های رسیده به‌چاپخانه تا ساعت ۹ چقدر است؟ (فرض می‌کنیم وقت شروع کار سیستم ساعت ۷ بوده است).

۶. از جاده‌ای که عرض آن تقریباً معادل یك اتومبیل است، اتومبیلها طبق فرایند پواسون (با میانگین سه اتومبیل در هر دقیقه)، عبور می‌کنند. شخصی بدون توجه به اتومبیلها، عرض جاده را در ۱۰ ثانیه طی می‌کند. احتمال اینکه سالم از جاده بگذرد، چقدر است؟

۷. مسئلهٔ ۶ را مجدداً در نظر بگیرید. فرض کنید که مدت عبور این شخص متغیر تصادفی



با توزیع نمایی و میانگین ۱۰ ثانیه است. احتمال اینکه این شخص سالم از جاده بگذرد، چیست؟

۸. کامیونی دارای ۱۰ چرخ، دو چرخ روی محور جلو و هشت چرخ روی محور عقب است. فرض کنید مسافتی که طی می‌شود تا یکی از لاستیکها پنچر شود متغیری تصادفی با توزیع نمایی است. به‌طور متوسط لاستیك جلو کامیون ۱۰ هزار کیلومتر و لاستیك عقب ۸۰۰۰ کیلومتر را بدون پنچر شدن طی می‌کند.
الف. احتمال اینکه پس‌از طی $m$ کیلومتر، هیچ‌کدام از لاستیکها پنچر نشود، چقدراست؟
ب. اگر اولین لاستیك در کیلومتر $Y$ پنچر شود، تابع توزیع $Y$ و همچنین $E(Y)$ را به‌دست آورید.
ج. تابع توزیع تعداد لاستیکهای پنچر شده تا کیلومتر ۵۰ هزار را محاسبه کنید.

۹. یك کارگاه تولیدی دارای سه ماشین صنعتی است. مسئول هر ماشین پس‌از مدتی کار، جهت تنظیم مجدد و کنترل قطعات تولید شده، مدتی هم آن‌را خاموش می‌کند. مدت زمان روشن‌بودن وهمچنین خاموشی ماشینها، متغیرهای تصادفی نمایی و مستقل هستند. میانگین مدت زمان روشن بودن ماشین اول را ۳۰ دقیقه و مدت زمان روشن بودن ماشینهای دوم و سوم را هرکدام ۲۰ دقیقه، میانگین مدت زمان خاموشی ماشین اول را ۱۵ دقیقه و مدت زمان خاموشی ماشینهای دوم و سوم را هرکدام ۱۰ دقیقه فرض می‌کنیم. یك لحظهٔ مشخص را در نظر بگیرید و فرض کنید که ۳ دقیقه از روشن شدن ماشین اول، ۸ دقیقه از روشن شدن ماشین دوم و ۱۳ دقیقه از روشن شدن ماشین سوم گذشته است و هر سه‌ماشین هنوز روشن هستند.
الف. احتمال اینکه ماشین شمارهٔ ۱ بین ۸ دقیقه و ۱۲ دقیقه پس‌از لحظهٔ موردنظر خاموش شود، چقدر است؟
ب. احتمال اینکه یکی از ماشینها زودتر از همه، بین ۸ دقیقه و ۱۲ دقیقه پس از لحظهٔ مورد نظر خاموش شود، چقدر است؟
ج. احتمال اینکه ماشین شمارهٔ یك زودتر از همه خاموش شود، چقدر است؟
د. احتمال اینکه ماشین شمارهٔ یك زودتر از همه خاموش شود و این خاموشی بین ۸ تا ۱۲ دقیقه پس‌از لحظهٔ مورد نظر اتفاق بیفتد، چقدر است؟

۱۰. مثال ۳.۳ (سیستم صف و دو خدمت‌دهنده) را مجدداً در نظر بگیرید. احتمال اینکه مشتری جدیدی بعد از هر دو مشتری از سیستم خارج شود، چقدر است؟ احتمال اینکه مشتری جدید، قبل‌از یکی‌از دو مشتری قدیمی از سیستم خارج شود، چقدراست؟ احتمال اینکه مشتری جدید قبل‌از مشتری شمارهٔ ۱ خارج شود، چقدر است؟

۱۱. کارخانه‌ای که دارای ۲ ماشین مشابه تزریق پلاستیك است، درصدد بستن قراردادی برای تولید انبوه قطعه‌ای پلاستیکی است. مدت قرارداد طوری است که فقط دو هزار

ساعات وقت برای تولید در اختیار است. هر ماشین تا موقعی که خراب نشده می‌تواند ۱۰ عدد قطعهٔ موردنظر را درساعت تولید کند، ولی چنانچه ماشین خراب شود، بادرنظر گرفتن زمان لازم برای تعمیرات، دیگر نمی‌توان از آن ماشین برای این تولید بخصوص استفاده کرد. مدت زمانی که ماشین بدون خراب شدن می‌تواند کار کند، طبق برآورد، متغیری تصادفی با توزیع نمایی و با میانگین هزار ساعت است.

الف. احتمال اینکه بتوان ۲۰ هزار قطعهٔ مورد نظر را تولید کرد، چقدر است؟

ب. احتمال اینکه بتوان حداقل ۳۰ هزار قطعهٔ مورد نظر را تولید کرد، چقدر است؟

ج. به سؤال بند ب مجدداً پاسخ دهید، مشروط براینکه محدودیت هزار ساعت وقت وجود نداشته باشد.

۱۲. ماشینی که دارای ۵ موتور مشابه مستقل است، درصورتی کار می‌کند که حداقل سه موتور آن سالم باشد. اگر فرض کنیم که احتمال خراب شدن هر موتور دارای توزیع نمایی است، تابع چگالی کارکرد این ماشین را به‌دست آورید.

۱۳. دستگاهی دارای سه نوع لامپ مخصوص است که آنها را $A$ و $B$ و $C$ می‌نامیم. عمر هر سه لامپ نمایی و میانگین آنها به ترتیب ۲۰۰ و ۴۰۰ و ۳۰۰ ساعت است. هر لامپ که بسوزد، بلافاصله با یك لامپ نو، از نوع خودش، تعویض می‌شود.

الف. احتمال اینکه اولین لامپ نوع $A$ بین ۶۰۰ تا ۱۲۰۰ ساعت کار کند، چیست؟

ب. احتمال اینکه اولین لامپ نوع $A$ قبل‌از اولین لامپ نوع $B$ بسوزد، چیست؟ احتمال اینکه اولین لامپی که می‌سوزد از نوع $A$ باشد، چیست؟

ج. احتمال اینکه تعداد لامپهایی که در ۱۲۰۰ ساعت اول می‌سوزد بیش‌از سه عدد باشد، چیست؟ (مجموع هر سه نوع)

د. احتمال اینکه بعدازسوختن دومین لامپ نوع $A$، اولین لامپ نوع $B$ هنوز سالم باشد، چیست؟

۱۴. یك کارگاه مبلسازی را در نظر بگیرید که مراجعهٔ مشتریها به آن بر اساس فرایند پواسون است. در این کارگاه، فقط یك گروه سازندهٔ مبل وجود دارد.

الف. در کدام یك از دو حالت زیر می‌توان این کارگاه را یك سیستم صف از نوع $M/M/1$ فرض کرد؟ چرا؟

حالت ۱. کارگاه سفارش انواع مختلف مبل و میز و صندلی را قبول می‌کند

حالت ۲. کارگاه تولید فقط یك نوع میز مشخص را به‌صورت سریسازی قبول می‌کند

ب. فرض کنید مشتریهایی که مراجعه می‌کنند بر دو نوع‌اند، یعنی به‌احتمال ۷۰ درصد مشتری جدید و به احتمال ۳۰ درصد مشتری قدیمی هستند. احتمال اینکه در هفتهٔ اول دو مشتری جدید و یك مشتری قدیمی مراجعه کنند، چقدر است؟ احتمال اینکه بعداز هشتمین مشتری جدید، یك مشتری قدیمی مراجعه کند، چقدر است؟

ج. اگر در طول سال دقیقاً ۲۶ مشتری مراجعه کرده باشند، احتمال اینکه در هفتهٔ دوم یك مشتری مراجعه کرده باشد، چقدر است؟

سطر اول صفحه بعد منتقل شد



احتمال اینکه در هر هفته دقیقاً یك مشتری مراجعه کرده باشد، چقدر است؟

۱۵. اگر $N(t)$ معرف فرایند پواسون باشد، $E[N(t)\cdot N(t+s)]$ را حساب کنید.

۱۶. بیمارانی که به‌یك بیمارستان مراجعه می‌کنند، با احتمال ۰٫۱ احتیاج به‌بستری‌شدن دارند. اگر مراجعهٔ آنها براساس فرایند پواسون با میانگین ۳ نفر در ساعت باشد، احتمال اینکه در شش ساعت اول ۱۰ بیمار بستری شوند، چقدر است؟

۱۷. سیستمی درساعت ۸ صبح شروع به‌کارمی‌کند. ورود مشتریها براساس فرایندپواسون است. فرض کنید تا ساعت ۱۱ صبح، جمعاً ۵ نفر وارد سیستم شده‌اند. احتمال اینکه بین ساعت ۹ تا ۹:۱۵ یك نفر وارد شده باشد، چقدر است؟ احتمال اینکه حداقل ۳نفروارد شده باشند، چقدر است؟

۱۸. متغیرهای تصادفی مستقل $X_i$، $(i=1, 2, \dots, n)$، را در نظر بگیرید. هر متغیر به‌احتمال $P$ مقداریك و به‌احتمال $(1-P)$ مقدارصفر را انتخاب می‌کند. متغیر تصادفی جدیدی به شرح زیر تعریف می‌کنیم.

$$S_N = X_1 + X_2 + \dots + X_N$$

ثابت کنید که متغیر تصادفی فوق دارای توزیع پواسون است، به‌فرض اینکه $N$ نیزدارای توزیع پواسون با پارامتر $\lambda$ باشد.

۱۹. تعداد تصادفات یك اتومبیل در سال براساس توزیع پواسون با میانگین $n$ است. چنانچه عمر این اتومبیل دارای توزیع نرمال (با میانگین $m$) باشد، میانگین تعداد تصادفات را در مدت عمر این ماشین حساب کنید.

۲۰. به یك سیستم صف، مشتریها طبق فرایند پواسون وارد می‌شوند. اگر به‌طور متوسط ساعتی ۸ مشتری به‌سیستم مراجعه کنند، با چه احتمالی مشتری چهارم قبل‌از نیم‌ساعت‌اول وارد سیستم می‌شود؟

۲۱. دو نوع مشتری به‌فروشگاهی مراجعه می‌کنند. ورود هر دو مشتری براساس فرایند پواسون، به‌ترتیب دارای پارامترهای ۵ و ۱۰ نفر در ساعت است.

الف. احتمال اینکه اولین مشتری که وارد می‌شود از نوع ۱ باشد، چقدر است؟

ب. احتمال‌اینکه پنجمین مشتری نوع ۱ قبل‌از دومین‌مشتری نوع ۲ واردشود، چقدراست؟

۲۲. مشتریهای یك‌سیستم طبق‌فرایندپواسون با آهنگ ۱۲ مشتری درساعت واردمی‌شوند. اگر در ۱۰ ساعت اول ۱۰۰ مشتری وارد شده باشند، احتمال اینکه درچهار ساعت‌آخر ۵۰ نفر وارد شده باشند، چقدر است؟

۲۳. در یك اداره، کمیسیونی درخواستهای متقاضیان را هر ماه یك بار بررسی می‌کند،

این متقاضیان طبق فرایند پواسون با آهنگ $\lambda$ مراجعه می‌کنند. برای اینکه مدت انتظار آنها کمتر شود، تصمیم گرفته شده است که این کمیسیون یک‌بار نیز در طول ماه جلسه تشکیل دهد. نشان دهید برای اینکه مدت زمان انتظار متقاضیان حداقل شود، بهترین تصمیم این است که جلسهٔ اضافی این کمیسیون در وسط هر ماه تشکیل شود.

۲۴. عمر یک قطعهٔ حساس ماشینی طبق توزیع نمایی با پارامتر $\lambda$ است. این قطعه را به‌دو دلیل عوض می‌کنند. یا خراب شود و یا عمرش به $T$ برسد. میانگین مدت‌زمانی که طول می‌کشد تا ~~قطعه~~ را عوض کنند، چقدر است؟

۲۵. چنانچه فاصلهٔ زمانی بین هر دو ورود متوالی مشتریها به‌سیستم، متغیر تصادفی نمایی با پارامتر $\lambda$ و مستقل از یکدیگر باشد، ثابت کنید که تعداد مشتریهایی که در فاصلهٔ صفر تا $t$ وارد می‌شوند براساس فرایند پواسون با پارامتر $\lambda$ است.
راهنمایی: از نتیجهٔ مسئلهٔ شماره ۴ فصل اول و همچنین قضیهٔ ۸.۳ استفاده کنید.

۲۶. در یک کارخانه، به‌طور متوسط هر چهار روز یک‌بار یک حادثه اتفاق می‌افتد. زمان بین دو حادثهٔ متوالی نمایی فرض می‌شود. ۲۵ درصد این حوادث منجر به مجروح شدن افراد می‌گردد و بقیه آنها جزئی هستند.
الف. احتمال اینکه در هشت روز آینده چهار حادثه اتفاق بیفتد، چیست؟
ب. احتمال اینکه درهشت روزآینده هیچ حادثهٔ منجر به‌مجروح‌شدن اتفاق نیفتد، چیست؟
ج. احتمال اینکه اولین حادثه‌ای که اتفاق می‌افتد جزئی باشد، چیست؟ چرا؟
د. احتمال اینکه در یک روز حداقل یک حادثه جزئی اتفاق بیفتد. ولی حادثهٔ منجر به‌مجروح شدن اتفاق نیفتد، چیست؟
ه. خسارت روزانهٔ ناشی‌از $n$ حادثه، معادل $10000+2000n$ برآورد می‌شود(چنانچه حادثه‌ای اتفاق بیفتد، طبیعتاً خسارتی هم وارد خواهد شد). میانگین خسارت روزانهٔ ناشی‌از حوادث را تعیین کنید.
و. در بیست روزگذشته دوحادثه اتفاق افتاده است. احتمال اینکه هر دو حادثه دریکی‌از روزهای اول یا دوم اتفاق افتاده باشد، چیست؟ احتمال اینکه یکی از آنها در روز اول‌و دیگری در روز دوم اتفاق افتاده باشد، چیست؟

۲۷. ماشینهایی که دارای دو موتور هستند، برای تعمیر به‌تعمیرگاهی فرستاده می‌شوند. مدت زمان تعمیر هر موتور (و نه هر ماشین) دارای توزیع نمایی با میانگین ۱۰ دقیقه است. احتمال اینکه فقط یک موتور هر ماشین خراب باشد، ۵۰ درصد و احتمال اینکه هر دو موتور خراب باشند، نیز برابر با ۵۰ درصد است. میانگین و واریانس مدت‌زمان تعمیر هر ماشین را به‌دست آورید.

۲۸. مسافری در لحظهٔ $t$ به ایستگاه اتوبوس می‌رسد. اتوبوسها طبق فرایند پواسون با پارامتر $\lambda$ وارد ایستگاه می‌شوند. زمان انتظار این مسافر را $W$ می‌نامیم. تابع توزیع و



میانگین $W$ را می‌خواهیم تعیین کنیم. مشخص کنید که کدام یک از جوابهای زیر صحیح است (و یا احتمالا هیچ‌کدام صحیح نیست).

الف. طبق خاصیت پواسون، $E(W)=\frac{1}{\lambda}$

ب. ورود مسافر در فاصلهٔ بین دو ورود اتوبوسهای متوالی کاملا تصادفی بوده است. لذا زمان ورود او را طبق توزیع یکنواخت در نظر می‌گیریم که میانگین آن نصف زمان بین دو ورود متوالی اتوبوسهاست؛ پس،

$$E(W)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\lambda}$$

۲۹. یک مدل $M/M/1$، که در آن آهنگ ورود مشتریها $\lambda$ و آهنگ خدمت‌دهی $\mu$ است، را در نظر بگیرید. در یک لحظه مشخص سیستم خالی است. مدت زمانی که ازاین لحظه به‌بعد طول می‌کشد تا اولین مشتری خارج شود را $E$ فرض می‌کنیم. نشان دهید که

$$P(E>t)=\frac{\mu e^{-\lambda t}-\lambda e^{-\mu t}}{\mu-\lambda}$$

۳۰. در یک جاده، اتومبیلها طبق فرایند پواسون عبور می‌کنند (با پارامتر $\lambda$). شخصی می‌خواهد عرض این جاده را طی کند. مدت زمان عبور او ثابت و برابر با $T$ است. بنابراین، موفقی می‌تواند این کار را انجام دهد که زمان بین عبور دو اتومبیل متوالی از $T$ کمتر نباشد. $N$ را تعداد اتومبیلهایی در نظر بگیرید که از جلو این شخص عبور می‌کنند تا فرصت عبور برای او پیدا شود. تابع توزیع $N$ چیست؟ میانگین مدت زمان انتظار این شخص چیست؟

۳۱. سفر یک سفینهٔ فضایی به‌زمان $T$ نیاز دارد. اجسام موجود در فضا ممکن است با این سفینه تصادف کنند و آن را از بین ببرند. این اجسام طبق فرایند پواسون ($\lambda$) جلو سفینه ظاهر می‌شوند. اگر چنین جسمی در مسیرسفینه قرار گیرد، با احتمال $P_1$ تصادف می‌کند و با احتمال $1-P_1$ از کنار آن می‌گذرد. سفینه مورد نظر برای دفاع از خود، دارای موشکهایی است که بمحض مشاهدهٔ چنین اجسامی به‌طرف آنها شلیک می‌شوند. هر موشک با احتمال $P_2$ جسم مقابل را از بین می‌برد. اگر سفینه دارای دو موشک باشد، احتمال اینکه سفرش را با موفقیت به‌پایان برساند، چیست؟

۳۲. یک گروه شکارچی‌را برای به‌دام انداختن یک‌جفت‌حیوان اعزام کرده‌اند. هرحیوانی که بدام می‌افتد، با احتمال $P$ نر و با احتمال $(1-P)$ ماده است. اگر $N$ معرف تعداد حیواناتی باشد که به‌دام می‌افتند تا یک جفت به‌دست آید، $E(N)$ را محاسبه کنید. فرض کنید تعداد حیواناتی که به‌دام می‌افتند، طبق فرایند پواسون و $T$ مدت زمانی است که

برای این‌کار تعیین شده است. احتمال اینکه این گروه بتواند در این مدت یك جفت به‌دست آورد، چیست؟

اکنون فرض کنید که قبل‌از زمان $T$، ماموریت این گروه به‌پایان رسیده است. میانگین مدت زمانی که‌مصرف کرده‌اند، چیست؟

**۳۳.** مسئلهٔ ۲۳ فصل دوم را با استفاده از مفهوم خاصیت بدون حافظه‌بودن توزیع نمایی مجدداً حل کنید.

**۳۴.** با استفاده از تابع مولد گشتاور نشان دهید که در توزیع ارلانگی اگر $r$ به‌سمت بینهایت میل کند، تابع چگالی آن مقدار ثابتی خواهد شد.

# ۴

# زنجیره‌های مارکوف

چون بسیاری از سیستمهای صف بر اساس **فرایند مارکوف** ساخته شده‌اند، لذا در این فصل ابتدا به بررسی اجمالی مفهوم این فرایند و سپس با تفصیل بیشتر به بحث در مورد حالتهای خاص آن به نام **زنجیره‌های مارکوف** و **زنجیره‌های مارکوف با زمان پیوسته** می‌پردازیم.

## ۱.۴ فرایند مارکوف

برای روشن شدن مفهوم کلی فرایند مارکوف، می‌توان گفت که اگر زمان را در این فرایند، به سه دورهٔ «گذشته»، «حال» و «آینده» تقسیم کنیم، «آیندهٔ» این فرایند بستگی به مسیری که در «گذشته» طی کرده است، ندارد و تنها به‌موقعیت آن در زمان «حال» وابسته است. مثلاً، فرایند پواسون نوعی‌فرایند مارکوف است، زیرا در آن تعداد پیشامدهایی که از یك لحظهٔ معین به‌بعد اتفاق می‌افتد، مستقل از پیشامدهایی است که قبل از آن افتاده است. به‌عبارت دیگر، چنانچه وضعیت فرایند در لحظاتی مانند $t_1, t_2, \ldots, t_n$ مشخص باشد، می‌توان گفت که برای پیش‌بینی حرکت آیندهٔ این فرایند، تنها آخرین اطلاعات، یعنی وضعیت فرایند در لحظهٔ $t_n$، کافی است.

خاصیت مارکوفی یك فرایند را می‌توان به‌زبان ریاضی نیز نشان داد. مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی $\{X(t),\ t \geqslant 0\}$ را درنظر بگیرید. اگر $X(t)$ طبق فرایند مارکوف عمل کند، به‌ازای تمام مقادیر $x_1, x_2, \ldots, x_n$ رابطهٔ زیر برقرار است.

$$P[X(t_{n+1}) \leqslant x \mid X(t_n)=x_n, \ldots, X(t_2)=x_2, X(t_1)=x_1]$$
$$= P[X(t_{n+1}) \leqslant x \mid X(t_n)=x_n] \qquad (۱.۲)$$

فرایندهای مارکوف را، به‌طور کلی، برحسب دو عامل طبقه‌بندی می‌کنند:

الف. پارامتر $t$، که می‌تواند پیوسته یا گسسته باشد. گسسته بودن $t$ را می‌توان چنین تفسیر کرد که رفتار سیستم تنها در مقاطع مشخصی از زمان مطالعه می‌شود. در صورتی که $t$ گسسته باشد، $X(t)$ با متغیرهای تصادفی به شکل $X_1, X_2, \ldots, X_n$ جایگزین می‌شود.

ب. مجموعهٔ مقادیری را که $X(t)$ می‌تواند انتخاب کند، برحسب تعریف، **حالت سیستم** می‌نامند. حالت سیستم نیز می‌تواند گسسته یا پیوسته باشد.

## ۲.۴ زنجیره‌های مارکوف

زنجیره‌های مارکوف حالت خاصی از فرایند مارکوف است، که در آن هم پارامتر $t$ و هم حالت سیستم، فقط مقادیر گسسته را انتخاب می‌کند. براین اساس، یك رشته متغیرهای تصادفی $X_1, X_2, \ldots, X_n$ را زنجیرهٔ مارکوف می‌نامند، اگر به‌ازای تمام مقادیر $n$، و تمام حالتهای $i$ و $j$ رابطهٔ زیر برقرار باشد.

$$P[X_{n+1}=j \mid X_1=i_1, X_2=i_2, \ldots, X_n=i] = P[X_{n+1}=j \mid X_n=i] \qquad (۲.۲)$$

در اینجا به $n$، مرحله نیز گفته می‌شود.

**مثال ۱.۴** نقطه‌ای فیزیکی را درنظر بگیرید که روی خطی مستقیم حرکت می‌کند. در هر حرکت، این نقطه به احتمال $P$ به اندازهٔ یك میلی‌متر به‌جلو و به احتمال $1-P$ به‌همین‌اندازه به‌عقب می‌رود. اگر $X(t)$، یعنی حالت‌سیستم را موقعیت این‌نقطه روی‌خط درنظر بگیریم، $X(t)$ یك زنجیرهٔ مارکوف تشکیل می‌دهد؛ زیرا موقعیت نقطه درحرکتهای بعدی، تنها به‌وضعیت فعلی آن بستگی دارد و مستقل از مسیری است که‌در گذشته طی کرده است (این فرایند را **قدم زدن تصادفی** نیز می‌گویند)

احتمال تغییر حالت سیستم از $i$ به $j$، یا به عبارت دیگر احتمال حرکت نقطه روی خط به شرح زیر است:

$$P[X_{n+1}=i+1 \mid X_n=i]=P$$

$$P[X_{n+1}=i-1 \mid X_n=i]=1-P$$



$$P[X_{n+1}=j \mid X_n=i]=0 \quad \text{اگر } j \neq i+1 \text{ یا } j \neq i-1 \text{ باشد،}$$

زنجیره‌های مارکوف همگن، حالت خاصی از زنجیرهٔ مارکوف است که در آن احتمال گذار سیستم از هر حالت به حالت دیگر مستقل از مرحلهٔ آن ($n$) باشد. به‌بیان ریاضی، زنجیرهٔ مارکوف را درصورتی همگن می‌نامیم که به‌ازای تمام مقادیر $i$ و $j$ و $n$ رابطهٔ زیر برقرار باشد.

$$P[X_{n+1}=j \mid X_n=i] = P[X_1=j \mid X_0=i] = P_{ij} \qquad (۳.۲)$$

بنابراین، در یك زنجیرهٔ مارکوف همگن، $P_{ij}$ معرف احتمال تغییر حالت سیستم از $i$ به $j$ است. از این به‌بعد، فرض می‌کنیم که زنجیره‌های مارکوف مورد بررسی، همگن هستند.

زنجیرهٔ مارکوف مثال ۱.۴ از نوع همگن است، زیرا احتمال حرکت نقطه به‌جلو یا عقب بستگی به تعداد حرکتهای انجام شده تا آن لحظه ندارد.

### ماتریس گذار

**ماتریس گذار**، ماتریسی است که عنصر تشکیل دهندهٔ آن در سطر $i$ و ستون $j$، مقدار $P_{ij}$ (احتمال تغییر حالت سیستم از $i$ به $j$) است. اگر فرض کنیم که تعداد حالتهای سیستم $M$ است، ماتریس گذار آن به‌شکل زیر درمی‌آید.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{11} P_{12} & \cdots & P_{1M} \\ P_{21} P_{22} & \cdots & P_{2M} \\ \vdots & & \vdots \\ P_{M1} P_{M2} & \cdots & P_{MM} \end{bmatrix} \qquad (۴.۲)$$

بدیهی است که تمام عناصر این ماتریس غیرمنفی است. مجموع عناصر هر سطر برابر با یك است (مجموع عناصر یك ستون لزوماً یك نیست). با توجه به نامتناهی بودن تعداد حالتهای سیستم، ابعاد ماتریس نیز می‌تواند نامتناهی باشد.

درمثال ۱.۴، حالت سیستم می‌تواند بین‌هرعدد صحیح، ازمنهای بینهایت تا به‌اضافهٔ بینهایت تغییر کند. به‌همین ترتیب ماتریس گذار نیز دارای ابعاد نامتناهی خواهد بود.

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\ \cdot\ \cdot\ q & \circ & p & \cdot & & & & \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ q & \circ & p & & & & & \\ & q & \circ & p & & & & \\ & & q & \circ & p & & & \\ & & & q & \circ & p & \cdot\ \cdot & \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \end{bmatrix} \qquad (۵.۲)$$

در ماتریس فوق $q=1-p$ و در سایر محلها مقدار احتمال صفر است.

به‌طور کلی، هر ماتریس مربع که تمام عناصر آن غیر منفی و مجموع عناصر هر سطر آن برابر با یك باشد را **ماتریس مارکوف** می‌نامند.

**مثال ۲.۴** فرض کنید که درآمد شخصی در روز $Y$ باشد. $Y$ متغیری تصادفی است که فقط اعداد صحیح غیرمنفی را انتخاب می‌کند و $P[Y=i]=a_i$ است. بدیهی است که $\sum_{i=0}^{\infty} a_i=1,\ a_i\geqslant 0$. چنانچه $X_n$ معرف مجموع درآمد آن شخص در $n$ روز اول باشد $X_n$ یك زنجیرهٔ مارکوف است، زیرا با دانستن درآمد آن شخص در $n$ روز اول می‌توان تابع توزیع مجموع درآمد $(n+1)$ روز اول را محاسبه کرد. ماتریس گذار این زنجیرهٔ مارکوف به‌شرح زیر است

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

**گذار $m$ مرحله‌ای**

با استفاده از ماتریس گذار، رابطهٔ بین حالتهای سیستم در دو مرحلهٔ متوالی مشخص می‌شود. به‌عبارت دیگر، با دانستن حالت هرمرحله، می‌توان تابع توزیع حالت سیستم را در مرحلهٔ بعد تعیین کرد. در این قسمت می‌خواهیم تعیین کنیم که چه رابطه‌ای بین حالت سیستم دریك مرحله و حالت آن در $m$ مرحلهٔ بعد موجود است. به‌عبارت دیگر، سؤالی که



مطرح می‌شود این است که اگر درمرحله‌ای، حالت سیستم $i$ باشد (یعنی $X_n=i$)، احتمال اینکه پس از $m$ مرحله، حالت سیستم به $j$ برسد (یعنی $X_{n+m}=j$)، چقدر است؟

بدیهی است با داشتن ماتریس گذار، می‌توان تابع توزیع $X_{n+1}$ را به‌دست آورد. با دانستن حالت مرحلهٔ $n+1$، تابع توزیع $X_{n+2}$ و به‌همین ترتیب $X_{n+3}, \ldots, X_{n+m}$ به‌دست می‌آید. لیکن، هدف این است که بتوان رابطهٔ مستقیم بین $X_n$ و $X_{n+m}$ را مستقیما تعیین کرد. برای این منظور ابتدا قرارداد زیر را تعریف می‌کنیم.

**تعریف الف.** $P_{ij}^{(m)}$ احتمال تغییر حالت سیستم از $i$ به $j$ در $m$ مرحله است، یعنی،

$$P_{ij}^{(m)}=P[X_m=j\,|\,X_0=i] \qquad (۶.۲)$$

ب. ماتریس گذار $m$ مرحله‌ای ماتریسی است که اجزای آن $P_{ij}^{(m)}$ باشد، یعنی،

$$\mathbf{P}^{(m)}=\begin{bmatrix} P_{11}^{(m)} & \cdots & P_{1M}^{(m)} \\ \vdots & & \vdots \\ P_{M1}^{(m)} & \cdots & P_{MM}^{(m)} \end{bmatrix} \qquad (۷.۲)$$

بنابراین برای تعیین رابطهٔ بین‌حالتهای سیستم در $m$ مرحله، شناخت $P^{(m)}$ ضروری است. برای تعیین $P^{(m)}$ قضیهٔ زیر را می‌توان به‌کار گرفت.

**قضیهٔ ۱.۴ الف.** به ازای تمام حالتهای $i$ و $j$ و به‌ازای هر $k$ و $k'$ رابطهٔ زیر برقرار است

$$P_{ij}^{(k+k')}=\sum_{s=0}^{\infty} P_{is}^{(k)}P_{sj}^{(k')} \qquad (۸.۲)$$

ب.

$$\mathbf{P}^{(m)}=P\,.\,P\,\ldots\ldots\ldots\,P=P^m \qquad (۹.۲)$$

(رابطهٔ (۸.۲) که به رابطهٔ $C$-$K$[1] معروف است، بیان‌کنندهٔ این حقیقت است

1. Chapman-Kolomogrov

که احتمال تغییر حالت سیستم از $i$ به $j$ در $(k+k')$ مرحله، برابر با مجموع تغییر حالتهای سیستم از $i$ به‌هر حالت دیگرسیستم، مثلا $s$ در $k$ مرحله و سپس از $s$ به $j$ در $k'$ مرحله است.)

اثبات: با استفاده از معادلات شرطی نتایج زیر به‌دست می‌آید.

$$P_{ij}^{(k+k')} = P[X_{k+k'} = j | X_0 = i] = \tag{۱۰.۴}$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} P[X_{k+k'} = j | X_k = s, X_0 = i] \times P[X_k = s | X_0 = i] = \sum_{s=0}^{\infty} P_{sj}^{(k')} P_{is}^{(k)}$$

رابطهٔ (۱۰.۴) را به‌صورت ماتریس نیز می‌توان نوشت

$$P^{(k+k')} = P^{(k)} \cdot P^{(k')} \tag{۱۱.۴}$$

چون رابطهٔ (۱۱.۴) به‌ازای تمام مقادیر $k$ و $k'$ صادق است، لذا

$$P^{(n)} = P \cdot P^{(n-1)}$$

از طرف دیگر

$$P^{(n-1)} = P \cdot P^{(n-2)}$$

و به‌همین ترتیب

$$P^{(2)} = P \cdot P$$

درنتیجه

$$P^{(n)} = P \cdot P \ldots P = P^n$$

**مثال ۳.۴** زنجیرهٔ مارکوفی را در نظر بگیرید که ماتریس گذار آن به شرح زیر باشد (حالتهای سیستم را ۱ و ۲ و ۳ فرض کنید)

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} ۰٫۷۵ & ۰٫۲۵ & ۰ \\ ۰٫۲۵ & ۰٫۵ & ۰٫۲۵ \\ ۰ & ۰٫۷۵ & ۰٫۲۵ \end{bmatrix}$$

مقادیر زیر را به‌دست آورید:

$P_{13}^{(2)}$ (احتمال اینکه سیستم از حالت ۱ شروع و پس‌از دو مرحله به ۳ برسد) و همچنین $P_{31}^{(2)}$

حل:



$$\mathbf{P}^{(2)} = P \cdot P = \begin{bmatrix} ۰٫۶۲۵ & ۰٫۳۱۲۵ & ۰٫۰۶۲۵ \\ ۰٫۳۱۲۵ & ۰٫۵ & ۰٫۱۸۷۵ \\ ۰٫۱۸۷۵ & ۰٫۵۶۲۵ & ۰٫۲۵ \end{bmatrix}$$

بنابراین،

$$P_{13}^{(2)} = ۰٫۰۶۲۵$$

$$P_{31}^{(2)} = ۰٫۱۸۷۵$$

مقادیر فوق را می‌توان مستقیماً، یا با استفاده از رابطه‌های (۸.۴) نیز به‌دست آورد. مثلا

$$P_{13}^{(2)} = P_{11}P_{13} + P_{12}P_{23} + P_{13}P_{33} = ۰٫۰۶۲۵$$

که در واقع این عبارت حاصل‌ضرب سطر اول در ستون سوم ماتریس گذار است.

### محاسبهٔ تابع توزیع حالت سیستم در هر مرحله

ممکن است در مواردی تعیین تابع‌توزیع سیستم درمرحلهٔ $n$ مدنظر باشد. به‌عبارت دیگر، ممکن است هدف محاسبهٔ $P(X_n = j)$ به‌ازای حالتهای مختلف $j$ و مراحل $n$ باشد. این احتمال را گاهی به‌صورت $\pi_j^{(n)}$ نشان می‌دهند. چنانچه تابع توزیع حالت‌سیستم درمرحلهٔ شروع، یعنی $P(X_0 = i)$، به‌ازای تمام حالتها مشخص باشد، بااستفاده ازمفهوم احتمال شرطی وماتریس گذار خواهیم داشت:

$$\pi_j^{(n)} = P(X_n = j) = \sum_i P[X_n = j | X_0 = i] \times P[X_0 = i] = \sum_i P_{ij}^{(n)} \cdot \pi_i^{(0)} \tag{۱۲.۴}$$

یا

$$\pi^{(n)} = \pi^{(0)} \times P^{(n)} \tag{۱۳.۴}$$

$\pi^{(0)}$ و $\pi^{(n)}$ بردارهایی هستند که عناصر تشکیل‌دهندهٔ آنها $\pi_i^{(0)}$ و $\pi_i^{(n)}$ است.

### محاسبهٔ احتمال حالت سیستم در چند مرحلهٔ مختلف

با دانستن حالت فعلی سیستم و ماتریس گذار می‌توانیم تابع توزیع حالت سیستم را در یك یا چند مرحلهٔ بعد به‌دست آوریم؛ اما، ممکن است مسیر مشخصی از حرکت آیندهٔ سیستم مدنظر باشد. مثلا، محاسبهٔ زیر را در نظر بگیرید:

$$P[X_1 = j, X_2 = k | X_0 = i] = P[X_2 = k | X_1 = j, X_0 = i] P[X_1 = j | X_0 = i]$$

$$= P_{jk} \cdot P_{ij}$$

بنابراین، احتمال فوق برابر است با حاصلضرب تمام حالات سیستم از $i$ به $j$ و سپس $j$ به $k$ به همین ترتیب. احتمال حرکت در چند حالت مشخص و در مراحل مختلف را می‌توان محاسبه کرد، یعنی

$$P(X_n=q, X_{n-1}=k, \dots, X_1=j \mid X_0=i)=P_{iq}\cdots P_{jk} \qquad (۱۲.۴)$$

**مثال ۴.۴** زنجیرهٔ مارکوف مثال ۳.۴ را در نظر بگیرید. به فرض اینکه در ابتدا سیستم بتواند حالتهای ۱ و ۲ و ۳ را با احتمالات مساوی انتخاب کند، مقادیر احتمالات زیر را محاسبه کنید.

$$A_1=P(X_2=2 \mid X_0=1)$$

$$A_2=P(X_2=2)$$

$$A_3=P(X_2=2, X_3=3, X_4=2 \mid X_0=1)$$

$$A_4=P(X_2=2, X_3=3, X_4=2)$$

حل: جملهٔ اول معرف احتمال تغییر حالت سیستم از ۱ به ۲ در سه مرحله است. به‌عبارت دیگر

$$A_1=P_{12}^{(3)}=\frac{23}{64}$$

جمله دوم معرف احتمال بودن سیستم در حالت ۲ است، درحالی‌که از موقعیت آن در شروع مراحل اطلاعی نداریم. به عبارت دیگر، حالت سیستم در مرحلهٔ صفر می‌تواند هرکدام از سه حالت ۱ و ۲ و ۳ باشد. با استفاده از احتمال شرطی،

$$A_2=\sum_{i=1}^{3}P(X_2=2 \mid X_0=i)P(X_0=i)=\frac{1}{3}\left(P_{12}^{(2)}+P_{22}^{(2)}+P_{32}^{(2)}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{23}{64}+\frac{30}{64}+\frac{34}{64}\right)=\frac{43}{96}$$

جملهٔ سوم معرف احتمال تغییر حالت سیستم از ۱ به ۲ و سپس از ۲ به ۳ و پس از آن از ۳ به ۲ است. لذا

$$A_3=P_{12}P_{23}P_{32}=(0.25)(0.25)(0.75)=\frac{3}{64}$$

جملهٔ چهارم شبیه جمله سوم است. با این تفاوت که از موقعیت سیستم در شروع مراحل



اطلاعی نداریم. بنابراین، با استفاده از احتمالات شرطی داریم:

$$A_4=\sum_{i=1}^{3}P(X_2=2, X_3=3, X_4=2 \mid X_0=i)P(X_0=i)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{64}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)=\frac{6}{64}$$

## ۳.۴ طبقه‌بندی حالتهای سیستم در یک زنجیرهٔ مارکوف

در این بخش به طبقه‌بندی حالتهای سیستم و معرفی چند واژهٔ مربوط به آن می‌پردازیم. هدف از این طبقه‌بندی، به‌کار گیری آن برای بررسی **احتمالات حدی** در زنجیرهٔ مارکوف است.

**تعریف.** حالت $i$ به حالت $j$ **دسترس‌پذیر** است اگر بتوان و وجود داشته باشد که احتمالاً سیستم بتواند از $i$ به $j$ انتقال پیدا کند. چنین گذری ممکن است در یک مرحله انجام شود، ولی به هر حال امکان‌پذیر است. به زبان ریاضی، $i$ به $j$ دسترسی دارد، اگر بتوان حداقل یک مقدار $n$ پیدا کرد که به ازای آن $P_{ij}^{(n)}>0$ باشد. اگر سیستم از $i$ به $j$ دسترسی داشته باشد، آن را به‌صورت $i \to j$ نشان می‌دهند.

**تعریف.** دو حالت $i$ و $j$ باهم مرتبط هستند اگر $i \to j$ و به‌عبارت دیگر، اگر هر دو حالت به‌هم دسترس داشته باشند. بدیهی است که چون $P_{ii}^{(0)}=1$، هر حالت با خودش هم مرتبط است.

**مثال ۵.۴** زنجیرهٔ مارکوف با ماتریس گذاری سه شرح زیر را در نظر بگیرید (حالتهای سیستم را ۱ و ۲ و ۳ می‌نامیم).

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

حالت ۱ به ۲ و ۲ به ۱ دسترس‌پذیر است، زیرا $P_{12}=1$ و $P_{21}=0.5$. به‌ی ۲ به ۱ و حالت ۱ به ۳ نیز دسترس‌پذیر است، زیرا از ۱ می‌توان به ۲ و از ۲ به ۳ گذر کرد. پس ۳ ← ۱: به عبارت دیگر ۳ ← ۲ ← ۱. طبق تعریف کلی $P_{13}^{(2)}=0.5>0$. به همین ترتیب، می‌توان نشان داد که همهٔ حالتها باهم مرتبط هستند.

**مثال ۶.۴** زنجیرهٔ مارکوفی با ماتریس گذاری سه شرح زیر را در نظر بگیرید (حالتهای سیستم را ۱ و ۲ و ۳ و ۴ می‌نامیم)

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} ۰٫۵ & ۰٫۵ & ۰ & ۰ \\ ۰٫۳ & ۰٫۷ & ۰ & ۰ \\ ۰٫۲ & ۰٫۲ & ۰٫۳ & ۰٫۳ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

حالت ۱ و ۲ باهم مرتبط هستند، از حالت ۳ می‌توان به‌تمام حالتها گذر کرد، ولی از سایر حالتها نمی‌توان به‌حالت ۳ دسترسی پیدا کرد، یعنی ۲←۳ ولی ۳↚۲. از حالت ۴ نیز به‌هیچ حالت دیگری (غیر از خودش) نمی‌توان دسترسی یافت.

**تعریف.** الف. مجموعهٔ تمام حالتهایی که با هم در ارتباط باشند را یك **کلاس** می‌نامند.

ب. سیستمی که فقط دارای یك کلاس باشد، یعنی تمام حالتهای آن باهم مرتبط باشند، را **سیستم یکپارچه** می‌نامند.

ج. مجموعه‌ای از حالتها را **بسته** می‌نامند، اگر امکان دسترسی از هیچ‌کدام از حالتهای این مجموعه به‌هیچ کدام از حالتهای خارج از آن وجود نداشته باشد، یعنی $P_{ij}$ (به‌ازای تمام حالتهای $i$ داخل مجموعه و $j$ خارج از مجموعه) برابر با صفر باشد.

د. اگر حالتی مانند $i$، به‌تنهایی مجموعه‌ای بسته را تشکیل دهد، به آن حالت **جاذب** می‌گویند، که در این صورت $P_{ii}=1$ است.

طبق تعاریف فوق، زنجیرهٔ مارکوف مثال ۵.۴ فقط دارای یك کلاس است و در نتیجه یك سیستم یکپارچه است، در حالی که زنجیرهٔ مارکوف مثال ۶.۴ دارای سه کلاس، یعنی $\{۱,۲\}$ و $\{۳\}$ و $\{۴\}$ است. ضمناً در مثال ۶.۴ حالت ۴ یك حالت جاذب است.

همان‌طور که مشاهده می‌شود، سیستم یکپارچه مجموعهٔ بسته‌ای است که هیچ کدام از زیرمجموعه‌های آن نمی‌تواند مجموعهٔ بسته باشد.

**قضیهٔ ۲.۴** اگر $i\leftrightarrow j$ و $j\leftrightarrow k$، پس $i\leftrightarrow k$.

اثبات: چون $i\leftrightarrow j$، بنابراین می‌توان دو عدد مانند $n$ و $n'$ را پیدا کرد که

$$P_{ij}^{(n')}>0\ ,\ P_{ji}^{(n)}>0 \qquad (۱۵.۲)$$

به‌همین ترتیب، چون $j\leftrightarrow k$، دو عدد $m$ و $m'$ وجود دارد که

$$P_{jk}^{(m)}>0\ ,\ P_{kj}^{(m')}>0 \qquad (۱۶.۲)$$

بنابراین

$$P_{ik}^{(n'+m)}=\sum_{r=1}^{\infty}P_{ir}^{(n')}\cdot P_{rk}^{(m)}\geqslant P_{ij}^{(n')}\cdot P_{jk}^{(m)}>0 \qquad (۱۷.۲)$$





درنتیجه $k\leftrightarrow i$. با همین روش می‌توان نشان داد که $i\leftrightarrow k$.

**مثال ۵.۴** را مجدداً در نظر بگیرید. چون ۲←۱ و ۳←۲، لذا طبق قضیهٔ فوق حالتهای ۱ و ۳ نیز باهم مرتبط هستند.

**تعریف.** فرض کنید که حالت سیستم در یك مرحله $i$ باشد. احتمال اینکه در مراحل بعدی سیستم به $i$ برگردد را با $f_i$ نشان می‌دهیم. حالت $i$ را **برگشت‌پذیر** می‌نامیم اگر $f_i=1$ باشد. به‌همین ترتیب، اگر $f_i<1$ باشد، حالت $i$ **گذرا** نامیده می‌شود.

به‌این ترتیب، اگر سیستم به‌حالت برگشت‌پذیری مانند $i$ برسد، در یکی ازمراحل بعدی به‌طور حتم به‌این حالت برمی‌گردد. لیکن، چنانچه از یك حالت گذرا شروع کند، لزوماً به‌آن حالت برنمی‌گردد، اگرچه امکان رسیدن به‌آن حالت هم برایش وجود دارد.

**مثال ۶.۴** را در نظر بگیرید. حالت ۳ گذراست، زیرا اگر سیستم از این حالت به‌هرحالت دیگر برود، امکان بازگشت آن‌وجود ندارد. دراین مثال، $f_1=1$، $f_2=1$، $f_3=0٫3$ و $f_4=1$ است. درنتیجه‌حالت ۳ گذرا و حالتهای ۱ و ۲ و ۴ برگشت‌پذیر هستند. برای نمونه مقدار $f_1$ را محاسبه می‌کنیم.

$$f_1=P[\text{شروع سیستم از ۱ و برگشت مجدد آن به ۱ در یکی از مراحل بعد}]$$

$$=1-P[\text{شروع سیستم از ۱ و هرگز برنگشتن آن به ۱}]$$

اما اینکه سیستم از ۱ شروع کند وهرگز به ۱ برنگردد به‌معنای آن‌است که از ۱ به‌حالت ۲ برود و از این مرحله به‌بعد فقط در حالت ۲ بماند. احتمال این‌کار برابر است با

$$\lim_{n\to\infty}(0٫5)(0٫7)^n=0$$

پس $f_1=1$ است.

### میانگین تعداد دفعات برگشت به‌یك حالت

براساس این تعریف، اگر حالت $i$ برگشت‌پذیر باشد و سیستم وارد این حالت شود، حتماً در آینده (نزدیك یا دور) سیستم مجدداً به $i$ برمی‌گردد. به‌همین ترتیب، فرایند مجدداً از $i$ شروع می‌شود و باز طبق این تعریف، به‌همین حالت برمی‌گردد. درنتیجه، با تکرار این‌کار می‌توان گفت که تعداد دفعاتی که سیستم وارد حالت $i$ می‌شود، نامتناهی است.

اما اگر حالت $i$ گذرا باشد و سیستم از این‌حالت شروع کند، به‌احتمال $f_i$ مجدداً به $i$ برمی‌گردد و به‌احتمال $(1-f_i)$ هرگز بازنمی‌گردد. به‌همین ترتیب، احتمال اینکه سیستم از $i$ شروع کند، پس‌از مدتی به $i$ برگردد و از آن پس هرگز به‌این حالت مراجعه نکند، عبارت از $f_i(1-f_i)$ است. در حالت کلی، احتمال اینکه سیستم دقیقاً $n$ مرتبه به $i$ برگردد وپس‌ازآن هرگز برنگردد برابر $f_i^{n}(1-f_i)$ است. همان‌طور که مشاهده می‌شود،

$$\frac{f_1}{1-f_1}$$

مقدار این احتمال دارای توزیع هندسی است، که میانگین آن $f_1/1-f_1$ خواهد بود. درنتیجه، میانگین تعداد دفعاتی که سیستم به $i$ برمی‌گردد عددی متناهی است.

برای اثبات قضیهٔ زیر، از خاصیت فوق درمورد حالتهای برگشت‌پذیر و گذرا، بمنظور محاسبهٔ تعداد دفعاتی که سیستم به آنها برمی‌گردد، استفاده می‌شود.

**قضیهٔ ۳.۴** دریك زنجیرهٔ مارکوف، چنانچه درمورد حالتی ازسیستم، مثلا $i$، مقدار $\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)}$ نامتناهی باشد، آن حالت برگشت‌پذیر، واگر عددی متناهی باشد، آن حالت گذراست.

اثبات: احتمال اینکه سیستم از $i$ شروع کند و مجدداً درمرحلهٔ $n$ به‌حالت $i$ برسد، برابر با $P_{ii}^{(n)}$ است. دراین مرحله، تعداد دفعاتی که سیستم به $i$ می‌رسد یا صفر یا یك است. بنابراین، میانگین تعداددفعات مراجعهٔ سیستم به‌حالت $i$ درمرحلهٔ $n$ برابر با $P_{ii}^{(n)}$ است. بدین‌ترتیب، $\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)}$ معرف میانگین تعداد دفعاتی است که سیستم در دراز مدت به $i$ برمی‌گردد. براساس آنچه که قبلا گفته‌شد، برای حالت $i$ درصورتی که برگشت‌پذیر باشد، این مقدار نامتناهی و برای حالت گذرا عددی متناهی است.

درمثال ۶.۲ می‌توان با استفاده ازقضیهٔ فوق برگشت‌پذیربودن حالتهای سیستم را بررسی کرد.

درمورد حالت ۳

$$P_{33} = 0.3$$

$$P_{33}^{(2)} = P_{31}P_{13} + P_{32}P_{23} + P_{33}P_{33} + P_{34}P_{43} = 0.09$$

$$P_{33}^{(3)} = (0.3)^3$$

$$\vdots$$

و

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{33}^{(n)} = \frac{0.3}{1-0.3} = \frac{3}{7}$$

درنتیجه حالت ۳ گذراست. به‌همین‌ترتیب، می‌توان نشان داد که سایر حالتها برگشت‌پذیر هستند.

**قضیهٔ ۴.۴** در یك زنجیرهٔ مارکوف با تعداد متناهی حالتها، تمام حالتهای آن نمی‌تواند گذرا باشد.

اثبات: فرض کنید که تعداد حالات این زنجیره متناهی و برابر با $M$ و همگی گذرا



باشد. یکی ازحالتها، مثلا ۱، را درنظر بگیرید. بعد ازمدتی متناهی، فرضاً $t_1$، سیستم دیگر هرگز به ۱ برنمی‌گردد. به‌همین ترتیب، بعد ازمدتی، مثلا $t_2$، سیستم نمی‌تواند به‌حالت ۲ برسد. بنابراین، بعد از گذشت‌مدت‌زمان معینی، سیستم به‌هیچ کدام ازحالتها برنمی‌گردد، که‌این امکان‌پذیر نیست. پس تعدادی از حالتهای سیستم اجباراً باید برگشت‌پذیر باشد.

**قضیهٔ ۵.۴** اگر $j \leftrightarrow i$ و $i$ برگشت‌پذیر باشد، $j$ نیز برگشت‌پذیر خواهد بود.

اثبات: چون $i$ و $j$ با هم مرتبط هستند، پس دوعدد صحیح مثلا $m$ و $m'$ می‌توان یافت که رابطه‌های زیر درموردآنها برقرار باشد.

$$P_{ij}^{(m)} > 0 \quad , \quad P_{ji}^{(m')} > 0 \qquad (۱۸.۲)$$

بنابراین، با استفاده از معادلهٔ $C-K$، رابطهٔ زیر به‌ازای تمام مقادیر $n$ برای $m+m'$ صادق است.

$$P_{jj}^{(m+n+m')} \geq P_{ji}^{(m')} P_{ii}^{(n)} P_{ij}^{(m)}$$

بنابراین،

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{jj}^{(n)} \geq P_{ji}^{(m')} P_{ij}^{(m)} \sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{(n)} \qquad (۱۹.۲)$$

اما چون $i$ برگشت‌پذیر و اعداد $m$ و $m'$ اعدادی مشخص و متناهی هستند. لذا

$$\sum_{n=m+m'}^{\infty} P_{jj}^{(n)} = \infty$$

درنتیجه، عبارت (۱۹.۲) نیز بینهایت و $j$ برگشت‌پذیراست.

**قضیهٔ ۶.۴** اگر $j \leftrightarrow i$ و $i$ گذرا باشد، دراین صورت $j$ نیز گذراست.

اثبات: اگر $j$ برگشت‌پذیر باشد، طبق قضیهٔ قبلی $i$ هم برگشت‌پذیر خواهد بود و این خلاف فرض است.

**قضیهٔ ۷.۴** در یك زنجیرهٔ مارکوف یکپارچه با تعداد حالات متناهی، تمام حالتها برگشت‌پذیر هستند.

اثبات: طبق دوقضیهٔ قبل، تمام‌حالتها باید یابرگشت‌پذیر ویا گذرا باشند. ازطرف دیگر، می‌دانیم دریك زنجیرهٔ مارکوف با تعداد حالات متناهی، تمام آنها نمی‌توانند گذرا باشند، پس همه برگشت‌پذیرهستند.

**تعریف.** میانگین تعداد مراحلی که طول می‌کشد تا سیستم ازحالت $i$ شروع کند و مجدداً به $i$ برگردد، را با $M_i$ نشان می‌دهند وبه‌آن میانگین زمان برگشت می‌گویند. با این تعریف، حالت برگشت‌پذیر را به دو گروه تقسیم می‌کنیم:

الف. **برگشت‌پذیر مثبت** اگر $M_i < \infty$ باشد

ب. **برگشت‌پذیر نهی** اگر $M_i = \infty$ باشد

**قضیهٔ ۸.۴** اگر $j \leftrightarrow i$ و $i$ برگشت‌پذیر مثبت باشد، $j$ نیز برگشت‌پذیر مثبت خواهد بود.

ضمناً در یک سیستم با تعداد حالات متناهی، تمام حالتهای آن برگشت‌پذیر مثبت هستند.

**تعریف:** اگر سیستم از $i$ شروع کند و بعداً فقط در مراحل $d$، $2d$ و $3d$ و... بتواند به $i$ برگردد، می‌گوییم حالت $i$ دارای **دوره** برابر با $d$ است. بدین‌ترتیب، به‌ازای تمام مقادیر عدد صحیح $n$، به استثنای $n = d, 2d, 3d$ رابطهٔ $P_{ii}^{(n)} = 0$ برقرار است. در حالت خاص، اگر $d = 1$، اصطلاحاً می‌گوییم $i$ نادوره‌ای است.

## ۴.۴ احتمالات حدی در زنجیره‌های مارکوف

یکی از ویژگیهای زنجیره‌های مارکوف این است که تحت شرایطی، حالت سیستم در دراز مدت مستقل از حالت اولیهٔ آن است. برای روشن شدن این موضوع، $P_{ik}^{(n)}$ و $P_{jk}^{(n)}$ را درنظر بگیرید. این دومقدار درحالت کلی با یکدیگر متفاوت هستند. به‌عبارت دیگر، احتمال اینکه سیستم در $m$ مرحلهٔ دیگر به حالت $k$ برسد، بستگی به‌حالت فعلی آن دارد. اما تحت شرایطی، هرچه $m$ افزایش یابد، مقادیر احتمالات فوق به یکدیگر نزدیکتر و درنهایت یکی‌می‌شوند. درنتیجه، صرف‌نظرازاینکه سیستم ازچه‌حالتی شروع کند، احتمال اینکه در درازمدت به‌حالت $k$ برسد، مقداری ثابت است که این مقدار را به $\pi_k$ نشان می‌دهیم. به‌عبارت دیگر، سیستم از هرحالتی، مثلا $i$ شروع کند، خواهیم داشت:

$$\pi_k = \lim_{n \to \infty} P_{ik}^{(n)} \qquad (۲۰.۴)$$

به‌همین ترتیب، بدیهی است که اگر حرکت سیستم در درازمدت مستقل ازحالت شروع آن باشد، رابطهٔ زیر نیز صدق می‌کند.

$$\pi_k = \lim_{n \to \infty} P(X_n = k) = \lim_{n \to \infty} \pi_k^{(n)} \qquad (۲۱.۴)$$

**مثال ۷.۴** زنجیرهٔ مارکوف زیر را درنظر بگیرید.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} ۰٫۲ & ۰٫۸ \\ ۰٫۶ & ۰٫۴ \end{bmatrix}$$

ماتریسهای گذار ۲ و ۴ و ۸ مرحله‌ای این زنجیرهٔ مارکوف عبارت است از:

$$\mathbf{P}^{(2)} = \begin{bmatrix} ۰٫۵۲ & ۰٫۴۸ \\ ۰٫۳۶ & ۰٫۶۴ \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{P}^{(4)} = \begin{bmatrix} ۰٫۴۴۴۲ & ۰٫۵۵۶۸ \\ ۰٫۴۱۷۶ & ۰٫۵۸۲۴ \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}^{(8)} = \begin{bmatrix} ۰٫۴۲۸۹ & ۰٫۵۷۱۱ \\ ۰٫۴۲۸۳ & ۰٫۵۷۱۷ \end{bmatrix}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، صرف‌نظر ازاینکه ازچه حالتی شروع کرده‌ایم، به‌تدریج ماتریس به یکدیگر نزدیک می‌شوند. به‌عبارت دیگر، صرف‌نظر از اینکه از چه حالتی شروع کرده باشیم، درنهایت با احتمال ثابتی به حالتهای ۱ یا ۲ می‌رسیم. بدین‌ترتیب، در چنین حالتی که **احتمالات حدی** وجود داشته باشد، موقعی که $n \to \infty$، ماتریس $\mathbf{P}^{(n)}$ هم به ماتریسی میل می‌کند، که تمام عناصر هرستون آن، مثلا ستون $i$ ام، برابر با $\pi_i$ باشد.

دراین بخش با استفاده از قضایای زیر، شرایط وجود احتمالات حدی دریک سیستم و همچنین نحوهٔ محاسبهٔ آنها را درسیستمهای یکپارچه و نادوره‌ای، سیستمهای یکپارچه با دورهٔ $d$ وسپس سیستمهای غیر یکپارچه بررسی می‌کنیم.

**قضیهٔ ۹.۴** یک زنجیرهٔ مارکوف یکپارچه با حالتهای نادوره‌ای را درنظر بگیرید. دراین زنجیرهٔ مارکوف،

الف. احتمالات حدی همیشه وجود دارد، یعنی صرف‌نظرازاینکه سیستم ازچه‌حالتی شروع کند، در درازمدت با احتمال ثابت $\pi_j$ به‌حالت $j$ گذر می‌کند.

ب. اگر حالتهای سیستم برگشت‌پذیر مثبت باشد، به‌ازای تمام حالتها $\pi_j$ عددی مثبت است.

ج. اگر حالتهای سیستم گذرا ویا برگشت‌پذیر تهی باشند. به‌ازای تمام حالتها، $\pi_j$ برابر با صفر است.

**قضیهٔ ۱۰.۴** دریک سیستم یکپارچه با حالتهای برگشت‌پذیر مثبت و نادوره‌ای (که آن را همه سویی می‌نامند) مقادیر احتمالات حدی $\pi_j$ با حل دستگاه معادلات زیر به‌دست می‌آید:

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i \, P_{ij}, \; j = 0, 1, 2, \ldots \qquad (۲۲.۴)$$

یا

$$(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \ldots) = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \ldots) \cdot p \qquad (۲۳.۴)$$

و

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1 \qquad (۲۴.۴)$$

که $\mathbf{P}$ ماتریس انتقال زنجیرهٔ مارکوف است. مقادیر $\pi_i$ را، که از روابط (۲۳.۴) و (۲۴.۴) به‌دست می‌آید، اصطلاحاً **توزیع ثابت** زنجیرهٔ مارکوف نیز می‌گویند. (باید توجه داشت که دستگاه معادلات (۲۳.۴) و (۲۴.۴) دارای یك معادلهٔ زاید است و لذا پس از حذف یکی از معادلات، (۲۳.۴) تعداد معادلات و مجهولها برابر خواهد شد).

**مثال ۸.۴** زنجیرهٔ مارکوف مثال ۷.۴ را درنظر بگیرید. این سیستم یکپارچه و نادوره‌ای است. ضمناً چون تعداد حالتهای آن متناهی است، لذا تمام حالتها برگشت‌پذیر مثبت هستند. احتمالات حدی را می‌توان طبق قضیهٔ ۹.۴ محاسبه کرد، یعنی

$$(\pi_1, \pi_2) = (\pi_1, \pi_2)\begin{bmatrix} ۰٫۲ & ۰٫۸ \\ ۰٫۶ & ۰٫۴ \end{bmatrix}$$

و

$$\pi_1 + \pi_2 = ۱$$

از حل معادلات فوق نتیجه می‌شود که: $\pi_1 = ۰٫۴۲۸۶$ و $\pi_2 = ۰٫۵۷۱۴$. می‌بینیم که در محاسبات مستقیم مثال ۷.۴ نیز، احتمالات حدی به این اعداد نزدیك می‌شوند. $\pi_1$ و $\pi_2$ به‌ترتیب معرف درصدی از اوقات است که سیستم در دراز مدت در حالت ۱ یا ۲ توقف می‌کند.

### احتمالات حدی در زنجیره‌های مارکوف با دورهٔ $d$

دراین مورد نیز، حالت سیستم دردرازمدت بستگی به‌حالت شروع آن ندارد. لیکن، چنانچه $n \to \infty$، کمیت $p_{ij}^{(n)}$ مقدار ثابتی نخواهد داشت، بلکه گاهی مقدار آن صفر و گاهی $\pi_j$ است. به‌عبارت دقیقتر، مقدار حد احتمال فوق بستگی به $n$ دارد. اگر $n$ را برابر $md+k$ نشان دهیم (که $m$ عددی صحیح است و $k = ۰, ۱, \dots, d-۱$)، $\lim_{m\to\infty} p_{ij}^{(md+k)}$ به‌ازای $k = ۰$ برابر $\pi_j$ و به‌ازای بقیهٔ مقادیر آن برابر با صفر خواهد بود. برای روشن شدن این موضوع، لازم به یادآوری است که براساس تعریف، اگر درزمان شروع (مرحلهٔ صفر)، حالت سیستم مثلاً $j$ باشد، فقط درمراحل $d$، $۲d$، $۳d$ و ... سیستم می‌تواند به $j$ برگردد. بدیهی است در مراحل دیگر، مثلاً در ۱، $d+۱$، $۲d+۱$، ... نیز سیستم به حالتهای دیگری غیر از $i$ خواهد رفت.

به‌این ترتیب، اگر حد ماتریس $P^{(n)}$ را به‌دست آوریم، به‌جای یك ماتریس، دارای $d$ ماتریس حدی خواهیم بود، که در هرماتریس فقط تعدادی ازعناصر سطر $i$ام برابر با $\pi_i$ و بقیه صفر خواهد بود (بستگی به‌حالت در مرحلهٔ شروع دارد). برای به‌دست آوردن مقادیر $\pi_i$ ازقضیهٔ زیر استفاده می‌کنیم.



**قضیهٔ ۱۰.۴** در یك زنجیرهٔ مارکوف یکپارچه با دورهٔ $d$، مقدار احتمالات حدی $\pi_i$ را می‌توان از رابطه‌های زیر به‌دست آورد:

$$(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots) = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots) \cdot P \qquad (۲۵.۴)$$

و

$$\sum_i \pi_i = d \qquad (۲۶.۴)$$

نکتهٔ قابل توجه دراین قضیه این است که مجموع احتمالات حدی، به‌جای اینکه برابر با یك باشد برابر با $d$ است. علت این امر این است که درمرحلهٔ $(md+k)$، سیستم فقط می‌تواند تعدادمشخصی ازحالتها را انتخاب کند. درنتیجه $\sum_i \pi_i = ۱$ فقط مربوط به‌حالتهای $i$ است، که امکان رسیدن به‌آنها دراین مرحله‌وجود دارد و با توجه به‌اینکه $d$ نوع ماتریس حدی وجود دارد، لذا $\sum_i \pi_i = d$ نیز صادق است.

**مثال ۹.۴** زنجیرهٔ مارکوف زیر را درنظر بگیرید.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰٫۲۵ & ۰٫۷۵ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

این زنجیرهٔ مارکوف یکپارچه، دارای دوره‌ای برابربا ۳است (این موضوع را تحقیق کنید). فرض کنید که درشروع کار، سیستم درحالت ۲ باشد. درمرحلهٔ دوم، این سیستم با احتمال ۱ به‌حالت ۱ می‌رود. در مرحلهٔ سوم (به‌ترتیب با احتمالهای ۰٫۲۵ و ۰٫۷۵) به‌یکی از حالتهای سه وچهار گذر می‌کند. در مرحلهٔ چهارم مجدداً به‌حالت ۲ برمی‌گردد و این کار مرتب ادامه پیدا می‌کند. بدین‌ترتیب، درمورد حالت ۱ خواهیم داشت: $\pi_1 = ۱$؛ زیرا، این سیستم درمراحل دوم، پنجم وهشتم و... به‌احتمال ۱ به‌این حالت می‌رسد ودر سایر مراحل امکان دسترسی به این حالت برای آن وجود ندارد. به همین ترتیب، $\pi_2 = ۱$، $\pi_3 = ۰٫۲۵$، $\pi_4 = ۰٫۷۵$ همین نتایج را می‌توان ازقضیهٔ ۱۰.۴ نیز به‌دست آورد. ماتریسهای حدی این زنجیرهٔ مارکوف عبارت‌اند از:

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{P}^{۲m} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & \frac{۱}{۴} & \frac{۳}{۴} \\ ۰ & ۰ & \frac{۱}{۴} & \frac{۳}{۴} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{P}^{(۲m+۱)} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & \frac{۱}{۴} & \frac{۳}{۴} \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}^{(2m+1)}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

همان طور که ماتریسهای فوق نشان می‌دهند، درهمهٔ آنها، مثلا $\pi_2 = 1/2$ است. یعنی، صرف‌نظر از حالت شروع، سیستم درهر $d$ مرحله یک‌بار با احتمال ۱/۲ به‌حالت ۳ می‌رسد. چنانچه ازحالت ۳ یا ۴ شروع کنیم، درمراحل ۳، ۶، $m$، ۳،... واگر ازحالت ۱ شروع کنیم، درمراحل ۱، ۴، ۷ و $m+1$، ۳، واگر ازحالت ۲ شروع کنیم در مراحل ۲، ۵ و ۸ و $3m+2$ می‌توانیم به این حالت برسیم. ماتریسهای حدی، این موضوع را نشان می‌دهند.

باتوجه به تعریف $M_j$، که قبلا ارائه شد، این کمیت معرف میانگین تعداد مراحلی است که طی آن سیستم از $j$ شروع می‌کند و مجدداً به $j$ می‌رسد. دردرازمدت رابطهٔ بین $M_j$ واحتمالهای حدی را می‌توان از قضیهٔ زیر به‌دست‌آورد.

**قضیهٔ ۱۲.۴** در یک زنجیرهٔ مارکوف یکپارچه، رابطهٔ زیر به‌ازای تمام مقادیر $j$ صادق است

$$\pi_j = \frac{d}{M_j} \qquad (27.4)$$

($d$ می‌تواند یک نیز باشد، یعنی حالتها بدون دوره باشند)

**مثال ۱۰.۴** درزنجیرهٔ مارکوف مثال ۹.۴ مقادیر $M_j$ را به‌دست‌آورید.

حل: براساس رابطهٔ (۲۷.۴)،

$$M_1 = M_2 = \frac{3}{1} = 3$$

$$M_3 = \frac{3}{0.25} = 12$$

$$M_4 = \frac{3}{0.75} = 4$$

می‌توانیم این مقادیر را مستقیماً نیز به‌دست‌آوریم، که:

$$M_i = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot P(T_i = n)$$



که $T_1$ = تعداد مراحلی است که در راه داریم تا از $i$ شروع کنیم ومجدداً به $i$ برگردیم. به‌عنوان نمونه:

$$P(T_1 = 3) = 1$$

و

$$P(T_1 = n) = 0 \quad , \quad n \neq 3$$

درنتیجه

$$M_1 = 3$$

وبه‌ازای تمام مقادیر $m$

$$P(T_2 = 3m) = \left(\frac{3}{4}\right)^{m-1}\left(\frac{1}{4}\right)$$

و به‌ازای تمام مقادیر $n$ که مضربی از ۳ نباشد،

$$P(T_2 = n) = 0$$

درنتیجه،

$$M_2 = \sum_{m=1} 3m \cdot P(T_2 = 3m) = 12$$

**احتمالات حدی درزنجیره‌های مارکوف غیریکپارچه**

اگرسیستم یکپارچه نباشد، عملا هر کلاس آن می‌تواند نقش یک‌زنجیرهٔ مارکوف یکپارچه را بازی کند. فرض کنیدکه درحالت $i$ باشیم. دوحالت ممکن است اتفاق بیفتد. اول اینکه $i$ گذرا باشد. دراین‌صورت سیستم درنهایت ازاین حالت وکلاس مربوط به‌آن خارج می‌شود وهرگز به‌آن برنمی‌گردد. که‌دراین‌حال $\pi_i = 0$ است. لیکن چنانچه $i$ برگشت‌پذیر (اعم ازمثبت یا تهی) باشد، سیستم ازاین مرحله فقط وارد حالتهایی می‌شودکه با $i$ مرتبط باشد وهرگز از کلاس مربوط به‌این حالت خارج نمی‌شود. به‌عبارت دیگر، بقیهٔ حالتها عملا حذف می‌شوند و در واقع با یک زنجیرهٔ مارکوف کوچکتر ولی یکپارچه سروکار خواهیم داشت ورابطه‌های مربوط به‌سیستمهای یکپارچه را می‌توان اعمال کرد.

## ۵.۴ زنجیره‌های مارکوف با زمان پیوسته

همان‌طور که در ابتدای این فصل گفتیم، دریک فرایند مارکوف هم پارامتر $t$ وهم حالت سیستم $X(t)$ می‌توانند یا گسسته ویا پیوسته باشند. دریک زنجیرهٔ مارکوف هردو عامل‌فوق

گسسته هستند (و به‌همین دلیل، به‌آنها زنجیره‌های مارکوف بازمان گسسته نیز می‌گویند). **زنجیره‌های مارکوف بازمان پیوسته**، حالت خاصی از فرایند مارکوف هستند، که در آنها پارامتر $t$ پیوسته است، اما فرض می‌شود که $X(t)$، حالت سیستم، همچنان گسسته است. در زنجیره‌های مارکوف با زمان گسسته، فرض می‌شود که تغییر حالت سیستم فقط در انتهای هرمرحله صورت می‌گیرد (و یا اینکه فقط در انتهای هرمرحله حالت سیستم مشاهده می‌شود)، درحالی که در زنجیره‌های مارکوف با زمان پیوسته، چنین محدودیتی وجود ندارد و درنتیجه، حالت سیستم می‌تواند در هر لحظه تغییر کند.

**تعریف.** فرایند مارکوف $\{X(t), t \geqslant 0\}$ را زنجیرهٔ مارکوف با زمان پیوسته (یا به اختصار زنجیره‌های مارکوف پیوسته) می‌نامند، اگر به‌ازای تمام مقادیر $s$ و $t$ رابطهٔ زیر برقرار باشد:

$$P[X(t+s)=j \mid X(s)=i,\ X(u)=x(u),\ u \leqslant s] \qquad (۲۸.۴)$$
$$= P[X(t+s)=j \mid X(s)=i]$$

اگر رابطهٔ فوق مستقل از $s$ باشد، این گونه زنجیرهٔ مارکوف را **همگن** می‌نامند. به‌عبارت دیگر، احتمال انتقال سیستم از یک حالت به‌حالت دیگر، به‌ازای تمام مقادیر $i$ و $j$ و $t$ از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$P_{ij}(t) = P[X(t+s)=j \mid X(s)=i] = P[X(t)=j \mid X(0)=i] \qquad (۲۹.۴)$$

به‌این ترتیب، $P_{ij}(t)$ احتمال گذار سیستم از حالت $i$ به $j$ درمدت $t$ است (دراین فصل، تنها به‌بررسی زنجیره‌های مارکوف پیوستهٔ همگن می‌پردازیم).

شکل ۱.۴ حرکت سیستم به حالتهای گوناگون را نسبت به‌زمان نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، در هر لحظه اززمان، سیستم می‌تواند یکی ازحالتهای ممکن را انتخاب کند. درهر حالت، سیستم مدتی متوقف و سپس به‌حالت دیگر گذر می‌کند. مدت زمان توقف درهرحالت متغیری تصادفی است.

**مثال ۱۱.۴** هر فرایند پواسون، یک زنجیرهٔ مارکوف با زمان پیوسته است، زیرا براساس خاصیت رشد مستقل، تعداد پیشامدها درفاصلهٔ زمانی $(s)$ تا $(s+t)$، مستقل از تعداد مشتریهایی است که تا لحظهٔ $s$ وارد شده‌اند. دراین فرایند، رابطهٔ (۲۹.۴) به‌شرح زیر خواهد بود:

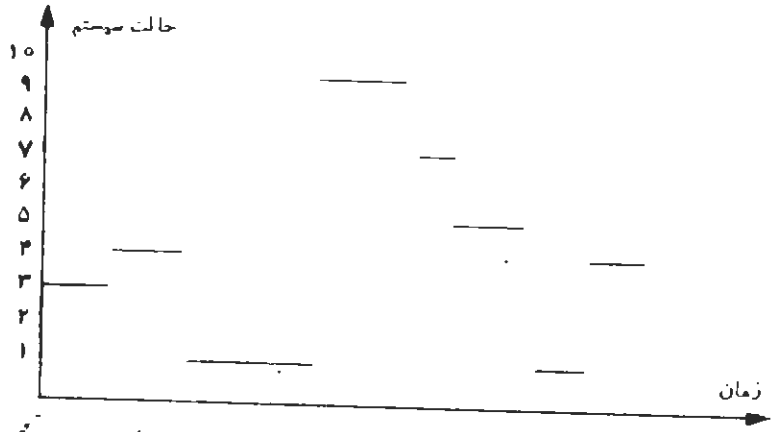
اگر $j \geqslant i$ باشد،

$$P_{ij}(t) = P[t \text{ زمان درمدت تعداد پیشامدها} = j-i] = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}$$

اگر $j < i$ باشد،

$$P_{ij}(t) = 0$$






**شکل ۱.۴** گذار سیستم به‌حالتهای مختلف نسبت به‌زمان دریک زنجیرهٔ مارکوف پیوسته

### تابع توزیع مدت‌زمان توقف دریک حالت

موقعی که سیستم وارد حالتی می‌شود، تا مدتی در آن حالت می‌ماند وسپس به‌حالت دیگری گذر می‌کند. اگر مدت‌زمانی که سیستم درحالت $i$ می‌ماند را با $T_i$ نشان دهیم، این متغیر تصادفی دارای توزیع‌نمایی است. علت این امر را می‌توان به‌شرح زیر بیان کرد:

فرض کنید که سیستم در لحظه‌ای که آن را لحظهٔ صفرمی‌نامیم، وارد حالت $i$ شده و تا لحظهٔ $s$ از آن‌حالت‌خارج نشده‌باشد. باتوجه‌به‌خاصیت مارکوفی این فرایند، روندحرکت آیندهٔ آن مستقل از مدت زمانی است که سیستم درحالت $i$ گذرانیده است. لذا، احتمال اینکه درفاصلهٔ زمانی $s$ تا $t+s$، سیستم همچنان درحالت $i$ باقی بماند، برابراست با احتمال اینکه حالت سیستم ازاین لحظه، به‌مدت $t$، تغییر نکند. بنابراین

$$P(T_i > t+s \mid T_i > s) = P(T_i > t) \qquad (۳۰.۴)$$

از طرف دیگر، طبق قضیهٔ ۱.۳، تنها متغیر تصادفی با خاصیت فوق، دارای توزیع‌نمایی با پارامتر $f_{T_i}(0)$ است. مقدار این پارامتر را بعداً محاسبه خواهیم کرد.

### ماتریس گذار و ماتریس آهنگ‌گذار

درمورد زنجیره‌های مارکوف پیوسته، دو نوع ماتریس را درموردگذار حالتها می‌توان معرفی کرد، یکی ازآنها، که **ماتریس گذار** نامیده و با $\mathbf{P}(t)$ نشان داده‌می‌شود، دارای همان مفهوم ماتریس انتقال درزنجیره‌های مارکوف گسسته است. هرعنصر این ماتریس، $P_{ij}(t)$، معرف احتمال گذار سیستم از $i$ به $j$ درمدت $t$ است. به‌این‌ترتیب، این ماتریس خودتابعی ازپارامتر $t$ خواهد بود.

حالت خاص این ماتریس، $P(0)$، باتوجه به‌عناصر تشکیل‌دهندهٔ آن به‌شرح زیر است:

$$P_{ii}(0)=1$$

به‌ازای $j \neq i$،

$$P_{ij}(0)=0$$

بنابراین، این ماتریس به‌شکل **ماتریس یکه** درمی‌آید، یعنی:

$$P(0)=I$$

ماتریس دیگری که می‌تواند گذار حالتها را بیان کند، **ماتریس آهنگ‌گذار** است، که با $\mathbf{Q}$ نشان داده می‌شود. عناصر تشکیل دهندهٔ این ماتریس، $q_{ij}$، به‌شرح زیر تعریف می‌شود:

الف. اگر $i \neq j$ باشد،

$$q_{ij}=\lim_{t\to 0}\frac{P_{ij}(t)}{t}=\frac{d}{dt}P_{ij}(t) \qquad (۳۱.۴)$$

با درنظر گرفتن اینکه $P_{ij}(t)$ معرف احتمال تغییر حالت سیستم از $i$ به $j$ در مدت‌زمان $t$ است، $q_{ij}$ نشاندهندهٔ آهنگ تغییرحالت سیستم از $i$ به $j$ خواهد بود.

ب. اگر $i=j$،

$$q_{ii}=-\sum_{i\neq j} q_{ij} \qquad (۳۲.۴)$$

ازطرفی دیگر، رابطهٔ (۳۲.۴) را با کمك رابطهٔ (۳۱.۴) می‌توان به‌شرح زیر بیان کرد:

$$q_{ii}=-\sum_{j\neq i}\frac{d}{dt}P_{ij}(t)=\frac{d}{dt}[-1+P_{ii}(t)]=\frac{d}{dt}P_{ii}(t) \qquad (۳۳.۴)$$

به‌این ترتیب، عناصر قطری ماتریس $\mathbf{Q}$ همگی منفی هستند ومجموع عناصر هرسطر برابر با صفر خواهد بود.

باتوجه به‌رابطهٔ (۳۱.۴)، $(-q_{ii})$ معرف آهنگ تغییر حالت از $i$ به مجموعهٔ حالتهای دیگر و $q_{ii}$ معرف آهنگ ماندن سیستم در $i$ است.

**مثال ۱۱.۴** را مجدداً درنظر بگیرید. ماتریس آهنگ گذار این زنجیرهٔ مارکوف، درسطر $i$ عبارت است از:

$$q_{ij}=0 \quad , \quad j\geq i+2 \text{ یا } j<i$$

$$q_{i,i+1}=\lambda$$



$$q_{i,i-1}=\lambda$$

ارتباط ماتریس آهنگ گذار با ماتریس گذار را می‌توان با استفاده از رابطهٔ زیر مشخص ساخت.

$$\mathbf{Q}=\lim_{t\to 0}\frac{P(t)-I}{t}=\frac{d}{dt}P(t)\Big|_{t=0} \qquad (۳۴.۴)$$

**محاسبهٔ پارامتر تابع توزیع $T_i$**

همان‌طورکه قبلا گفتیم $T_i$ دارای توزیع‌نمایی با پارامتر $f_{T_i}(0)$ است. از طرف دیگر طبق خاصیت «د» توزیع‌نمایی، پارامتر آن معرف آهنگ وقوع پیشامد موردنظراست. لذا پارامتر متغیر تصادفی $T_i$ برابر با $(-q_{ii})$ خواهدبود. به‌این ترتیب،

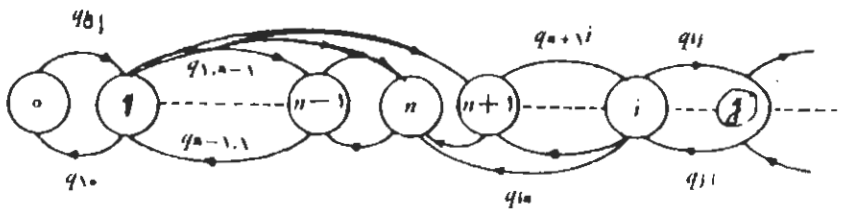
$$P(T_i>x)=e^{q_{ii}x}$$

**نمودار آهنگ**

رابطهٔ بین حالتهای یك سیستم مارکوفی را می‌توان با **نمودار آهنگ** نشان داد. دراین نمودار، گرهها معرف حالت سیستم وشاخه‌ها نشاندهندهٔ امکان‌گذار ازهرحالت به‌حالتهای دیگر است. اندازه‌های روی شاخه‌ها، $q_{ij}$، براساس تعریف فوق، نشاندهندهٔ آهنگ تغییر حالت سیستم از $i$ به $j$ است. درنمودار آهنگ، $q_{ii}$ها نشان داده‌نمی‌شوند.

**معادلهٔ C-K**

دراینجا نیزشبیه زنجیرهای مارکوف گسسته، رابطه‌ای به‌شکل زیر، درمورد همهٔ حالتهای $i$ و $j$ وزمانهای $t_1$ و $t_2$ صدق می‌کند.




**شکل ۲.۴** نمودار آهنگ یك سیستم مارکوف.

**قضیهٔ ۱۳.۴**

$$P_{ij}(t_1+t_2)=\sum_k P_{ik}(t_1)P_{kj}(t_2) \qquad (۳۵.۲)$$

اثبات:

$$P_{ij}(t_1+t_2)=P[X(t_1+t_2)=j|X(0)=i]=\sum_k P[X(t_1+t_2)=j|$$

$$X(t_1)=k,\ X(0)=i]P[X(t_1)=k|X(0)=i]$$

ازطرف دیگر، طبق خاصیت مارکوفی

$$P[X(t_1+t_2)=j|X(t_1)k,\ X(0)=i]=$$

$$P[X(t_1+t_2)=j|X(t_1)=k]=P_{kj}(t_2)$$

وهمچنین

$$P[X(t_1)=k|X(0)=i]=P_{ik}(t_1)$$

معادلهٔ $C$-$K$ را می‌توان به‌صورت ماتریسی و به شکل زیرنیز نوشت:

$$P(t_1+t_2)=P(t_1)\times P(t_2) \qquad (۳۶.۲)$$

**نحوهٔ محاسبهٔ $P(t)$ معادلات پیشرو و پسرو**

طبق رابطهٔ (۳۴.۲)، می‌توان $\mathbf{Q}$ را از $P(t)$ به‌دست آورد. اما درعمل معمولا $\mathbf{Q}$ را به‌سادگی وبراساس اطلاعات مربوط به‌ساختارزنجیرهٔ مارکوف می‌توان مشخص ساخت، درحالی‌که به‌دست آوردن $P(t)$ به‌طور مستقیم مشکل یا غیرممکن است. لذا، ضرورت دارد که $P(t)$ با استفاده از $\mathbf{Q}$ محاسبه شود. برای انجام این‌کاررابطهٔ (۳۶.۲) را مجدداً درنظربگیرید. اگر ازطرفین نسبت به $t_2$ مشتقگیری کنیم، چنین نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial P(t_1+t_2)}{\partial t_2}=P(t_1)\frac{\partial P(t_2)}{\partial t_2}$$

دررابطهٔ فوق، مقدار $t_2$ را برابر با صفر و $t_1$ را برابر $t$ انتخاب می‌کنیم. چنانچه رابطهٔ (۳۴.۲) را هم درنظربگیریم، نتیجه‌می‌شود که

$$\frac{dP(t)}{dt}=P(t)\cdot Q \qquad (۳۷.۲)$$

دستگاه معادلات دیفرانسیل فوق به‌نام **معادلات پیشرو** $C$-$K$ موسوم است.



درمحاسبات فوق، اگر ازرابطهٔ (۳۶.۲) نسبت به $t_1$ مشتقگیری کنیم، به جای رابطهٔ (۳۷.۲) رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید، که «معادلهٔ پسرو $C$-$K$» نامیده می‌شود.

$$\frac{dP(t)}{dt}=\mathbf{Q}\cdot P(t) \qquad (۳۸.۲)$$

**مثال ۱۲.۴** ماشینی را درنظر بگیرید که یا درحال کارکردن ویا درتعمیرگاه تحت تعمیراست. فرض می‌کنیم مدت‌زمان کار این‌ماشین متغیری تصادفی با توزیع‌نمایی و پارامتر $\lambda$ ومدت تعمیرنیزدارای توزیع‌نمایی با پارامتر $\mu$ است. اگر درلحظهٔ صفرماشین مشغول کار باشد، احتمال اینکه درلحظهٔ $t=15$ نیز درحال کارکردن باشد، چقدراست؟

حل: سیستم دارای دوحالت مشغول به‌کار (۱) و درحال تعمیر (۲) است. ماتریس آهنگ گذار این سیستم دارای اجزای زیراست:

$$q_{12}=\lambda \qquad q_{21}=\mu$$

$$q_{11}=-\lambda \qquad q_{22}=-\mu$$

پس

$$\begin{bmatrix}\frac{dP_{11}(t)}{dt} & \frac{dP_{12}(t)}{dt}\\ \frac{dP_{21}(t)}{dt} & \frac{dP_{22}(t)}{dt}\end{bmatrix}=\mathbf{Q}\cdot P(t)=\begin{bmatrix}-\lambda & \lambda\\ \mu & -\mu\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_{11}(t) & P_{12}(t)\\ P_{21}(t) & P_{22}(t)\end{bmatrix}$$

یا

$$\frac{dp_{11}(t)}{dt}=-\lambda[p_{11}(t)-p_{21}(t)]$$

$$\frac{dp_{21}(t)}{dt}=\mu[p_{11}(t)-p_{21}(t)]$$

اولی را در $\mu$ ودومی را در $\lambda$ ضرب و باهم جمع می‌کنیم

$$\mu\frac{dp_{11}(t)}{dt}+\lambda\frac{dp_{21}(t)}{dt}=0$$

انتگرال می‌گیریم:

$$\mu p_{11}(t)+\lambda p_{21}(t)=C$$

باتوجه به‌شرایط‌اولیه، $p_{11}(0)=1$ و $p_{21}(0)=0$ نتیجه می‌شود که، $C=\mu$ ودرنتیجه

$$\lambda p_{21}(t)=\mu[1-p_{11}(t)]$$

این رابطه را دراولین معادلهٔ دیفرانسیل فوق قرارمی‌دهیم. درنتیجه

$$\frac{dp_{11}(t)}{dt}=-(\lambda+\mu)p_{11}(t)+\mu$$

یا

$$\frac{1}{\lambda+\mu}\frac{dp_{11}(t)}{dt}=-\left[p_{11}(t)-\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right]$$

درنتیجه،

$$\frac{dp_{11}(t)}{p_{11}(t)-\frac{\mu}{\lambda+\mu}}=-(\lambda+\mu)dt$$

$$\log_e\left[p_{11}(t)-\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right]=-(\lambda+\mu)t+\log_e C$$

یا

$$p_{11}(t)-\frac{\mu}{\lambda+\mu}=Ce^{-(\lambda+\mu)t}$$

براساس شرایط اولیه $Pii(0)=1$، درنتیجه

$$1-\frac{\mu}{\lambda+\mu}=C$$

و

$$C=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

و به‌این ترتیب،

$$P_{11}(t)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}$$

دراین مسئله، پیداکردن $P_{11}(15)$ مدنظر است، پس

$$P_{11}(15)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-15(\lambda+\mu)}$$



**تبدیل زنجیره‌های مارکوف با زمان پیوسته به‌زنجیرهٔ مارکوف معمولی**

همان‌طورکه گفته‌شد تفاوت دو زنجیرهٔ مارکوف فوق دراین است‌که درزنجیرهٔ مارکوف گسسته‌تغییرحالتها درواحد زمان بررسی می‌شود، درحالی‌که درزنجیرهٔ مارکوف پیوسته، زمانی‌که سیستم دریك حالت می‌ماند، متغیری تصادفی با توزیع‌نمایی است. حال اگردر زنجیرهٔ مارکوف پیوسته، واحدزمان را مدت‌زمانی بدانیم‌که سیستم دریك حالت می‌ماند، می‌توان آن را به‌زنجیرهٔ مارکوف گسسته تبدیل کرد. دراین صورت، اجزای ماتریس انتقال آن به‌شکل زیر درمی‌آید:

$$\mathbf{P}_{ii}=0 \qquad (۳۹.۴)$$

$$\mathbf{P}_{ij}=\left(\frac{-1}{q_{ii}}\right)q_{ij} \qquad (۴۰.۴)$$

(برای اثبات رابطهٔ (۳۹.۴)، به‌مثال شمارهٔ ۲.۴ (فصل ۲ مراجعه شود).

**مثال ۱۳.۴** فرایند پواسون را مجدداً درنظربگیرید. اگرحالت سیستم $n$ باشد، یعنی اینکه تااین لحظه $n$ پیشامد اتفاق افتاده است. همان‌طورکه گفته شد، این فرایندیك زنجیرهٔ مارکوف پیوسته است. اگر واحد زمان را زمان بین دو پیشامد درنظربگیریم، به‌زنجیرهٔ مارکوف گسسته با ماتریس گذار زیرتبدیل می‌شود:

$$P_{nn}=0$$

$$P_{n,n+1}=1$$

$$P_{nj}=0,\ j\neq n+1$$

## ۶.۴ روابط حدی در زنجیرهٔ مارکوف با زمان پیوسته

دراینجا نیزمی‌خواهیم تابع توزیع حالت‌سیستم را دردرازمدت، $(t\to\infty)$ تعیین‌کنیم. قضیهٔ زیرکه مشابه‌آن درزنجیرهٔ مارکوف گسسته ارائه شد، می‌تواند روابط حدی رادر حالت پایدار به‌دست‌آورد.

**قضیهٔ ۱۴.۴** اگرسیستم یکپارچه باشد، دراین‌صورت، حد $P_{ij}(t)$ به‌سمت عددی میل می‌کندکه آن را $\pi_j$ می‌نامیم، یعنی

$$\lim_{t\to\infty}P_{ij}(t)=\pi_j$$

ضمناً اگر تمام حالات برگشت‌پذیر مثبت باشند، که دراین‌صورت سیستم را ارگودیك (*Ergodic*) می‌نامند، مقداراحتمالات حدی نیز ازرابطهٔ زیربه‌دست می‌آید:

$$\sum_i \pi_j q_{ji}=0 \quad , \quad i=1,2,\cdots\cdots \qquad (۴۱.۴)$$

و

$$\sum_j \pi_j = 1 \qquad (۴۲.۴)$$

رابطهٔ (۴۱.۴) را به‌شکل ماتریس زیر می‌توان نشان داد:

$$[\pi_1, \pi_2, \ldots\ldots]\mathbf{Q} = 0 \qquad (۴۳.۴)$$

دراینجا $\mathbf{Q}$ ماتریس آهنگ گذار و $\pi_j$ معرف درصدی از زمان است که سیستم درحالت $j$ می‌ماند.

**استفاده از نمودار آهنگ برای محاسبهٔ روابط حدی**

رابطهٔ (۴۱.۴) را می‌توان با کمک نمودار آهنگ نیز به‌دست آورد. برای هرحالت، مثلا $i$، رابطهٔ فوق را به‌شکل زیر درمی‌آوریم:

$$\pi_i q_{ii} = \sum_{j \neq i} \pi_j q_{ji} \quad , \quad i = 1, 2, \ldots$$

اما می‌دانیم که

$$q_{ii} = -\sum_{j \neq i} q_{ij}$$

درنتیجه

$$\sum_{j \neq i} \pi_i q_{ij} = \sum_{j \neq i} \pi_j q_{ji} \qquad (۴۴.۴)$$

جملات سمت‌چپ مربوط به‌آهنگ گذار خروجی از $i$ به‌بقیهٔ حالتها وجملات سمت‌راست مربوط به‌آهنگ گذار ازسایر حالتها به $i$ است. هرجمله حاصل‌ضرب دو کمیت است، اولی آهنگ گذار ازیك حالت به‌حالت دیگر، $q_{ij}$، ودیگری احتمال بودن سیستم درحالت مبدأ، $\pi_j$، است. بدیهی است که، باتوجه به‌اینکه رابطهٔ (۴۱.۴) برای به‌دست‌آوردن روابط حدی است، مقادیر احتمالات موردنظر نیز مربوط به‌درازمدت خواهد بود.

به‌این‌ترتیب، برای محاسبهٔ روابط حدی می‌توان ازنمودار آهنگ استفاده‌کرد. برای این‌منظور مجموع $\pi_i q_{ij}$ های خروجی و ورودی هرحالت را مساوی یکدیگر قرارمی‌دهیم. این گونه معادلات را **معادلات تعادلی** نیز می گویند.

**مثال ۱۴.۴** زنجیرهٔ مارکوفی که ماتریس آهنگ گذار آن به‌شرح زیر است را درنظر بگیرید



$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -6 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -9 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & -6 \end{bmatrix}$$

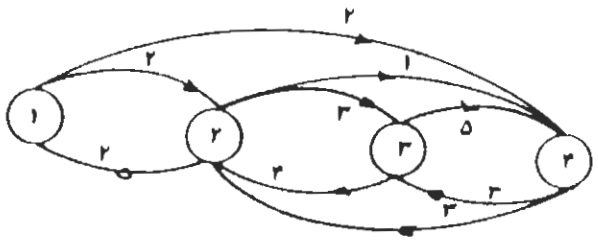
رابطه‌های حدی برای این زنجیره با استفاده ازرابطه‌های (۴۲.۴) و(۴۳.۴) به‌شرح زیر محاسبه می‌شود.

$$[\pi_1 \ \pi_2 \ \pi_3 \ \pi_4]Q = 0$$

یا

$$\begin{cases} -4\pi_1 + 2\pi_2 = 0 \\ 2\pi_1 - 6\pi_2 + 4\pi_2 + 3\pi_4 = 0 \\ 3\pi_2 - 9\pi_3 + 3\pi_4 = 0 \\ 2\pi_1 + \pi_2 + 5\pi_3 - 6\pi_4 = 0 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_2 + \pi_4 = 1 \end{cases} \qquad (۴۵.۴)$$

معادلات فوق را می‌توانیم با استفاده ازمعادلات تعادلی نیز به‌دست آوریم. برای این‌کار ابتدا نمودار آهنگ این مسئله‌را رسم می‌کنیم. چون این زنجیره‌دارای چهار حالت است، نمودار آهنگ نیز دارای چهار گره‌است که هر گره معرف یك حالت است. مقادیر مربوط به آهنگ گذار ازهرحالت به حالت دیگر نیز روی نمودارنشان داده شده است. معادلات تعادلی را برای هر گره (حالت)، می‌نویسیم:




حالت ۱:

مقادیر مربوط به خروج از حالت ۱ ، $\pi_1(2+2)$

مقادیر مربوط به‌ورود به‌حالت ۱ ، $2\pi_2$

درنتیجه با استفاده ازمعادلهٔ تعادلی داریم: $4\pi_1 = 2\pi_2$

حالت ۲: $(2+3+1)\pi_2 = 2\pi_1 + 4\pi_2 + 3\pi_4$

حالت ۳: $(4+5)\pi_2 = 3\pi_2 + 3\pi_4$

حالت ۴: $(3+3)\pi_4 = 2\pi_1 + \pi_2 + 5\pi_3$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، معادلات فوق همان معادلات (۴۵.۴) هستند، که مستقیماً از روی نمودار آهنگ و براساس معادلات تعادلی به‌دست آمده‌اند، پس ازحل معادلات فوق، احتمالات حدی به‌دست می‌آیند.

## مسائل

۱. دریك‌سیستم مخابراتی، پیامها به‌شکل صفرویك ارسال می‌شوند. هرپیام باید ازمراحل مختلف بگذرد. فرض‌کنیدکه یك پیام با احتمال $P$ بدون تغییر یك مرحله را طی می‌کند. اگر $X_n$ معرف حالت یك پیام (صفر و یك) درمرحلهٔ $n$ام باشد، نشان دهیدکه $X_n$ یك زنجیرهٔ مارکوف تشکیل می‌دهد. ماتریس گذار را بنویسید.

۲. درهریك از دوطرف موجود، سه‌توپ وجوددارد. سه‌عدد ازتوپها سفید وسه عدد دیگر قرمز است. هردفعه به‌طورهمزمان ازهرطرف یك‌توپ به‌طور تصادفی برمی‌داریم ودرطرف دیگر قرارمی‌دهیم. اگر $X_n$ معرف تعداد توپهای سفید طرف اول پس از $n$ دفعه برداشتن باشد، نشان دهیدکه $X_n$ یك زنجیرهٔ مارکوف تشکیل‌می‌دهد. ماتریس گذارآن را بنویسید.

۳. سکه‌ای‌که احتمال‌آمدن شیر درآن $P$ است، را پرتاب می‌کنیم. $X_n = k$ معرف‌این است‌که تاکنون $k$ نوبت متوالی (و ازجمله در پرتاب $n$ام) شیرآمده است. $X_n$ را به‌صورت یك زنجیرهٔ مارکوف نشان دهید وماتریس‌گذار آن را بنویسید.

۴. درظرفی پنج‌توپ سفید و چهارتوپ قرمز وجود دارد. هردفعه یك توپ را به‌طور تصادفی ازظرف برمی‌داریم وسپس آن توپ به‌اضافهٔ دو توپ همرنگ‌آن را مجدداً به ظرف برمی‌گردانیم. فرض‌کنید $X_n$ معرف رنگ توپی باشدکه دردفعهٔ $n$ ام ازظرف برداشته‌ایم. (این مدل به‌مدل Polya معروف است).

الف. تابع توزیع $X_n$ را به دست آورید. برای این منظور، با استفاده از روش



استقرا[1] نشان دهیدکه احتمال انتخاب یك توپ سفید همیشه برابر ۵/۹ است.

ب. آیا $X_n$ یك زنجیرهٔ مارکوف همگن را تشکیل می‌دهد؟

ج. $Y_n$ را تعداد توپهای سفید موجود در ظرف قبل از $n$ امین برداشت در نظر بگیرید. آیا $Y_n$ زنجیرهٔ مارکوف است؟ در صورتی که جواب مثبت است، ماتریس گذار را بنویسید.

۵. انباری را درنظر بگیریدکه کالایی را عرضه می‌کند. تقاضا برای این‌کالا درطول هفته می‌تواند با احتمال یکسان، صفر، ۱، ۲، ۳، ۴ یا ۵ باشد. در انتهای هر هفته سفارش کالا انجام می‌شود وبلافاصله تأمین می‌گردد، اما انبار مجبور است‌که کالا را فقط دربسته‌های سه‌تایی بخرد. اگر درطول هفته مشتری مراجعه‌کرد وکالا موجود نبود، سفارش اوهمچنان محفوظ می‌ماند وپس ازتأمین کالا به‌او تحویل داده می‌شود. لذا، سطح موجودی منفی به‌معنای سفارش تأمین نشده است. ضابطهٔ سفارش به‌این‌ترتیب است‌که چنانچه موجودی درانتهای هفته به‌میزانی کمتر از ۲ (۱ یاکمتر) برسد، حداقل سفارش ممکن داده می‌شود، تا میزان موجودی به ۲ یا بیشتر برسد (با درنظرگرفتن اینکه فقط سفارش با ضرایب ۳ امکانپذیراست). نشان‌دهیدکه‌میزان موجودی درانتهای هفته، قبل وهمچنین بعد ازسفارش، به‌صورت زنجیرهٔ مارکوف است.

ماتریس گذار این دو زنجیرهٔ مارکوف را بنویسید.

۶. درمسئلهٔ یك، با روش‌استقرا نشان دهیدکه،

$$\mathbf{P}^{(n)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(2P-1)^n & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(2P-1)^n \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(2P-1)^n & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(2P-1)^n \end{bmatrix}$$

۷. مسئلهٔ یك را مجدداً بافرض $P = 0.9$ درنظربگیرید. احتمال اینکه یك‌پیام صفر پس‌از گذشتن‌از ۵ مرحله بازهم به‌شکل صفر باشد، چقدراست؟ اگرپیامی‌پس‌ازگذشتن‌از۵ مرحله به‌شکل صفرباشد، احتمال اینکه در شروع مراحل هم به‌شکل صفر بوده‌باشد، چقدراست، مشروط براینکه تعداد پیامهای صفر در مرحلهٔ شروع، ۲ برابرپیامهای یك بوده‌باشد؟

۸. فرایند $X_n$ را درنظر بگیریدکه فقط مقادیر صفر ویك و دو را انتخاب می‌کند. فرض کنیدکه عبارت زیر، بسته به‌اینکه $n$ فرد یا زوج باشد، برابر با $P_{ij}$ یا $P'_{ij}$ است.

$$P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i,\ X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0\}$$

---

۱. برای این‌منظور، ابتدا ثابت‌کنیدکه رابطهٔ فوق به‌ازای $n = 1$ صدق می‌کند. آن‌گاه، نشان دهیدکه اگر رابطهٔ به‌ازای $n$ صادق باشد به‌ازای $(n+1)$ نیزصادق است.

$P_{ij}$ و $P'_{ij}$ را از ماتریسهای زیر به‌دست می‌آوریم.

$$\mathbf{P}=\begin{vmatrix} ۰٫۵ & ۰٫۲۵ & ۰٫۲۵ \\ ۰٫۶ & ۰ & ۰٫۴ \\ ۰٫۳ & ۰٫۲ & ۰٫۵ \end{vmatrix} \qquad \mathbf{P}'=\begin{vmatrix} ۰ & ۰٫۸ & ۰٫۲ \\ ۰٫۳ & ۰٫۳ & ۰٫۴ \\ ۰٫۷ & ۰٫۳ & ۰ \end{vmatrix}$$

آیا $X_n$ یك زنجیرهٔ مارکوف همگن تشکیل می‌دهد؟ اکنون حالت سیستم را به صورت $Y_n=(a,b)$ نشان می‌دهیم، که $a$ مقادیر صفر و یك و دو را می‌گیرد (یعنی همان حالتهای قبلی) و $b$ نشان‌دهندهٔ زوج یا فرد بودن مقدار $n$ است. این فرایند را در چارچوب یك زنجیرهٔ مارکوف نشان دهید.

۹. سه زنجیرهٔ مارکوف، که ماتریسهای گذار آنها به‌شرح زیر است را در نظر بگیرید.

$$\mathbf{P}_1=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰٫۸ & ۰٫۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \qquad \mathbf{P}_2=\begin{bmatrix} ۰٫۷ & ۰٫۲ & ۰ & ۰ & ۰٫۱ \\ ۰ & ۰٫۴ & ۰ & ۰ & ۰٫۶ \\ ۰ & ۰ & ۰٫۳ & ۰٫۷ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰٫۵ & ۰٫۵ & ۰ \\ ۰ & ۰٫۱ & ۰ & ۰ & ۰٫۹ \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_3=\begin{bmatrix} ۰٫۵ & ۰ & ۰ & ۰٫۵ & ۰ \\ ۰ & ۰٫۳ & ۰ & ۰ & ۰٫۷ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰٫۶ & ۰ & ۰ & ۰٫۴ \end{bmatrix}$$

کدام حالتها برگشت‌پذیرند؟ دورهٔ برگشت را برای هر حالت محاسبه کنید.

۱۰. زنجیرهٔ مارکوفی با سه حالت ۱ و ۲ و ۳ و با ماتریس گذار زیر مفروض است. اگر در ابتدا سیستم درحالت ۱ باشد، احتمال اینکه پس از دو مرحله مجدداً درحالت ۱ قرار گیرد، چقدر است؟ آیا می‌توان پیش‌بینی کرد که بعد از تعداد مراحل بسیار زیاد، به‌چه احتمالی درحالت ۱ خواهد بود؟

$$\begin{vmatrix} ۰ & ۰٫۷۵ & ۰٫۲۵ \\ ۰٫۵ & ۰ & ۰٫۵ \\ ۰٫۶ & ۰٫۴ & ۰ \end{vmatrix}$$



۱۱. یك زنجیرهٔ مارکوف $8\times 8$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $j$ و $i$، نشان‌دهید که حداکثر در ۸ مرحله می‌توان از $i$ به $j$ رسید.

۱۲. در مسئلهٔ یك، آیا احتمال حدی وجود دارد؟ جوابهای به‌دست آمده را باجواب مسئلهٔ شش مقایسه کنید.

۱۳. پنج نفر روی یك دایره ایستاده‌اند و مشغول توپ‌بازی هستند. هر کسی توپ را دراختیار داشته باشد، به‌طور شانسی برای دیگران پرتاب می‌کند. احتمال اینکه کسی که توپ در اختیارش است، پس از دو پرتاب مجدداً توپ را دراختیار داشته باشد، چقدر است؟ پس از پنج پرتاب، و در درازمدت، احتمال اینکه توپ دراختیار این شخص قرار گیرد، چقدر است؟

۱۴. ماتریس گذار یك زنجیرهٔ مارکوف را در نظر بگیرید، که مجموع عناصر هر ستون آن برابر با یك باشد. اگر این ماتریس یکریخت و ماندگار باشد، و دارای $M$ حالت باشد، نشان دهید که در درازمدت [illegible] خواهد بود

$$\pi_j=\frac{1}{M}\ ,\ j=1,2,\ldots,M$$

۱۵. فرض کنید که $X_n$ معرف مجموع پرتابهای $n$ طاس باشد. با استفاده از نتایج مسئلهٔ ۱۴ رابطهٔ زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n \text{ مضربی از عدد نه بودن})$$

راهنمایی: فرض کنید که $Y_n$ معرف مابه‌التفاوت $X_n$ با بزرگترین مضرب ۹ که از $X_n$ کوچکتر است باشد، ماتریس گذار $Y_n$ را بنویسید و نشان دهید که مجموع عناصر ستونهای آن برابر با یك است. آنگاه از نتیجه مسئلهٔ ۱۴ استفاده کنید.

۱۶. در هر دست مسابقه بین دو تیم الف و ب، تیم الف به‌احتمال ۰٫۴ برنده می‌شود. تیمی برنده است که سه‌دست را ببرد و پس از آن بازی متوقف می‌شود.

الف. این مسئله را به‌صورت یك زنجیرهٔ مارکوف نشان دهید.

ب. بااستفاده از رابطه‌های زنجیره‌ای مارکوف، این احتمال را که بازی در سه دست تمام شود، حساب کنید.

ج. بااستفاده از روابط زنجیره‌های مارکوف، این احتمال را که تیم الف برنده شود، حساب کنید.

۱۷. در یك سیستم موجودی، فرض می‌شود که میزان تقاضا در هر هفته متغیری تصادفی با توزیع پواسون و میانگین ۲ است. چنانچه میزان موجودی در انتهای هفته صفر یا یك باشد، مقدار سفارش به‌اندازه‌ای خواهد بود که سطح موجودی به ۴ برسد. اما اگر موجودی در

پایان هفته دو یا بیشتر باشد، سفارشی داده نمی‌شود. فرض می‌کنیم که کالای سفارش شده بلافاصله به‌انبار می‌رسد و چنانچه تقاضایی درطول هفته به‌علت نداشتن موجودی تأمین نشود، آن تقاضا از دست رفته تلقی می‌شود. این مسئله را به شکل یك زنجیرهٔ مارکوف فورموله کنید وماتریس گذار آن را بنویسید. تابع توزیع مقدارموجودی کالا را دردراز-مدت به‌دست آورید.

۱۸. زنجیرهٔ مارکوف پیوسته‌ای باسه‌حالت (۰ و ۱ و ۲) وماتریس آهنگ گذار زیرمفروض است

$$\begin{bmatrix} -0.6 & 0.5 & 0.1 \\ 1.2 & -1.2 & 0 \\ 0.6 & 0.2 & -0.8 \end{bmatrix}$$

الف. نمودار آهنگ آن را رسم کنید

ب. احتمال اینکه دردرازمدت سیستم درحالت صفر باشد، چقدراست؟

۱۹. زنجیرهٔ مارکوف پیوستهٔ مسئلهٔ ۱۸ را به زنجیرهٔ مارکوف گسسته تبدیل کنید.

۲۰. بااستفاده ازروابط حدی درزنجیرهٔ مارکوف پیوسته، احتمالات حدی مدل مسئلهٔ ۱۸ را محاسبه کنید ونتایج حاصله را با نتایج به‌دست آمده ازنمودار آهنگ مقایسه کنید.

۲۱. نشان دهید که ماتریس زیرمعرف ماتریس گذار یك زنجیرهٔ مارکوف پیوسته است. آن گاه ماتریس آهنگ گذار را به‌دست آورید.

$$\mathbf{P}(t)=\begin{bmatrix} 0.6+0.4e^{-5t} & 0.4-0.4e^{-5t} \\ 0.6-0.6e^{-5t} & 0.4+0.6e^{-5t} \end{bmatrix}$$

۲۲. نمودار آهنگ مسئلهٔ ۲۱ را رسم کنید وسپس احتمال‌بودن سیستم را درهریك از دو حالت (دردرازمدت) حساب کنید. این نتایج را مستقیماً ازروی ماتریس $\mathbf{P}(t)$ نیز به‌دست آورید.

۲۳. دستگاه معادلات دیفرانسیل پیشرو و پسرو ($C$-$K$) مربوط به مسئلهٔ ۱۸ را بنویسید.

۲۴. با استفاده ازمعادلات پیشرو(یا پسرو) $C$-$K$، تابع توزیع $P_n(t)$ درفرایند پواسون را به‌دست آورید.

۲۵. ثابت کنید که در درازمدت ($n \to \infty$)، رابطهٔ زیرصدق می‌کند.

$$P(X_n = j \mid X_{n+1} = i) = p_{ji}\frac{\pi_j}{\pi_i}$$



۲۶. درمثال ۶.۴، باروش استقرا نشان دهیدکه به‌ازای تمام مقادیر $n$، مقدار هرکدام از احتمالات زیر حداقل برابر با ۰٫۳ است. آن گاه ثابت کنیدکه حالتهای ۱ و ۲ برگشت-پذیر هستند.

$$(p_{22}^{(n)},\ p_{21}^{(n)},\ p_{12}^{(n)},\ p_{11}^{(n)})$$

۲۷. با فرض دانستن ماتریس آهنگ گذار، با استفاده ازرابطهٔ پیشرو یا پسرو ($C$-$K$)، ماتریس گذار مسئلهٔ ۲۱ را به‌دست آورید

راهنمایی: ازرابطه‌های $\frac{dp_{11}(t)}{dt}-\frac{dp_{21}(t)}{dt}$ وهمچنین $\frac{4dp_{0}(t)}{dt}+\frac{2dp_{21}(t)}{dt}$ استفاده کنید.

$$\frac{3dp_{11}(t)}{dt}$$

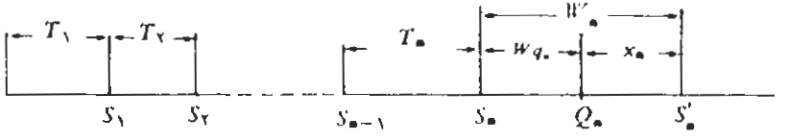
# ۵

# چارچوب کلی سیستمهای صف

دراین فصل، چارچوب و رابطه‌های کلی حاکم بر سیستمهای صف را مورد بررسی قرار می‌دهیم. چنین رابطه‌هایی درمورد همهٔ سیستمها صادق است و بستگی به شرایط ویژهٔ آنها ندارد. حالتهای خاص را درفصول بعد بررسی می‌کنیم.

## ۱.۵ بیان ترسیمی سیستم برحسب زمان

فرض کنید که اولین مشتری در زمان $s_1$، دومی در $s_2$ و $n$ امین مشتری درزمان $s_n$ وارد سیستم می‌شود. فاصلهٔ زمانی بین ورود مشتری $(n-1)$ ام و مشتری $n$ ام را با $T_n$ نشان




**شکل ۱.۵** رابطهٔ بین ورود، خروج و مدت انتظار مشتریان درسیستم



می‌دهیم. یك مشتری، فرضاً مشتری شماره $n$، پس از ورود، مدتی درصف می‌ماند وسپس درلحظهٔ $Q_n$ شروع به دریافت خدمت می‌کند، و بالاخره در زمان $S'_n$ از سیستم خارج می‌شود. مدت زمان انتظار این مشتری درصف را با $Wq_n$، مدت‌زمان توقف او درسیستم را با $W'_n$ ومدت‌زمان دریافت خدمت را با $x_n$ نشان می‌دهیم. بدین‌ترتیب، رابطه‌های زیر میان این پارامترها برقرار است.

$$Wq_n = Q_n - S_n \qquad (۱.۵)$$

$$W_n = S'_n - S_n \qquad (۲.۵)$$

$$x_n = S'_n - Q_n \qquad (۳.۵)$$

$$W_n = Wq_n + x_n \qquad (۴.۵)$$

روابط فوق، درشکل ۱.۵ نشان داده شده است.

تعداد مشتریهایی را که تا لحظهٔ $t$ وارد سیستم شده‌اند با $X(t)$ و تعداد مشتریهایی را که تا این لحظه خارج شده‌اند با $X'(t)$ نشان می‌دهیم. به‌عبارت دیگر،

$$X(t) = \{n:\ S_n \leqslant t, S_{n+1} > t\} \qquad (۵.۵)$$

$$X'(t) = \{n:\ S'_n \leqslant t, S'_{n+1} > t\} \qquad (۶.۵)$$

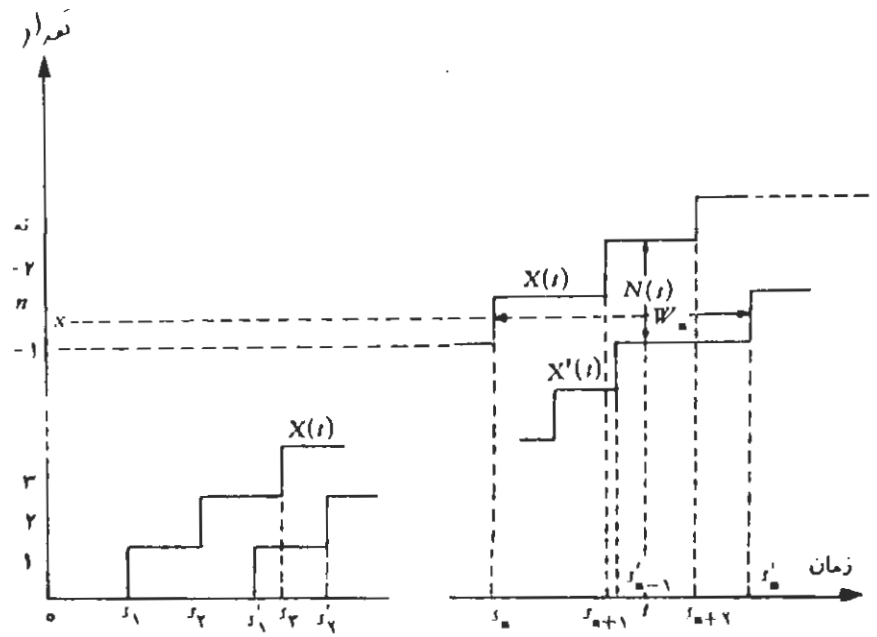
اگر تعداد مشتریهای داخل سیستم را درلحظهٔ $t$ با $N(t)$ بیان کنیم

$$N(t) = X(t) - X'(t) \qquad (۷.۵)$$

شکل ۲.۵، منحنی تغییرات $X(t)$ و $X'(t)$ را نسبت به زمان نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، درزمانهای $S_n$، $(n = 1, 2, \ldots)$ مقدار تابع $X(t)$ و درزمانهای $S'_n$، مقدارتابع $X'(t)$ دارای جهشی برابر واحد است. فاصلهٔ عمودی بین این دوتابع، درلحظهٔ $t$، معرف تعداد مشتریهای داخل سیستم دراین لحظه، یعنی $N(t)$، خواهد بود. از طرف دیگر، فاصلهٔ افقی بین محور عمودی (یعنی $t = 0$) در ارتفاع $x$، $(n-1 < x < n)$ تا منحنی $X(t)$، بیانگر زمان ورود مشتری $n$ ام، یعنی $S_n$ وفاصلهٔ افقی بین $X(t)$ و $X'(t)$ درهمین فاصله معرف زمان انتظار مشتری $n$ ام درسیستم، یعنی $W_n$ خواهد بود.

## ۲.۵ دورهٔ گذرا و دورهٔ پایدار سیستم

معیارهای عمدهٔ بررسی یك سیستم نظیر میانگین تعداد مشتریها درسیستم، زمان انتظار یك مشتری درسیستم (و یا صف) و درصد بیکاری سیستم معمولاً ماهیت تصادفی دارد ولذا میانگین آنها باید مبنای ارزیابی سیستم قرار گیرد. اما، میانگین و یا سایر کمیتهای مربوط به‌آنها نیز خود تابعی اززمان است. دربسیاری ازسیستمها، موقعی که زمان از حد مشخصی



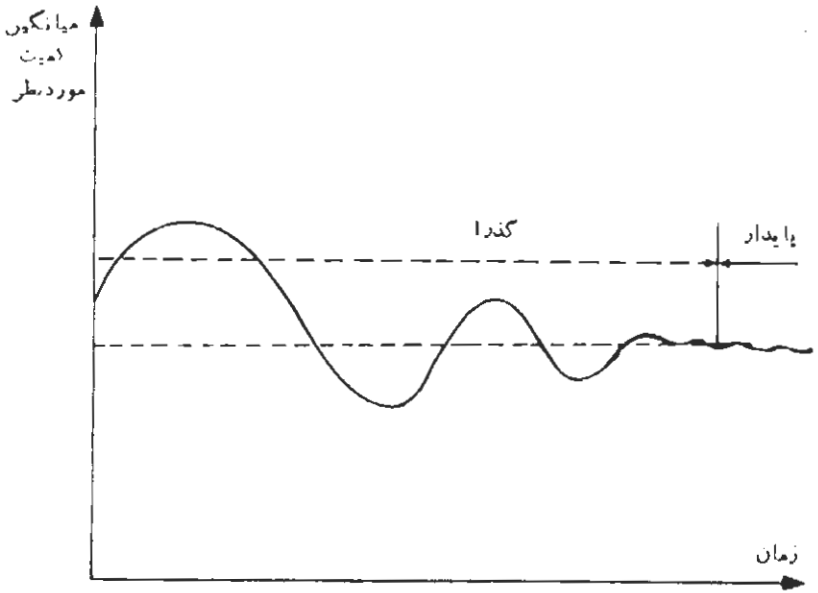

**شکل ۲.۵** منحنی تغییرات تعداد مشتریهای سیستم نسبت به‌زمان

تجاوز کند، این کمیتها به سمت اعداد ثابتی میل می‌کنند. مثلا، اگر سیستم درزمان شروع کار، با تعداد زیادی مشتری روبه‌رو باشد، بدیهی است که طول صف زیاد خواهد بود؛ اما، ممکن است به‌تدریج طول صف کم شود و بعد از مدتی میانگین آن تقریباً ثابت بماند. میانگین طول صف در درازمدت (یا میانگین مدت زمان انتظار مشتری درصف) معمولا بستگی به‌شرایط اولیهٔ سیستم ندارد.

با این مقدمه، دورهٔ گذرا را مدت زمانی تعریف می‌کنیم که وضعیت سیستم (میانگین معیارهای ارزیابی وسایرعوامل مربوط به‌آن) تغییر می‌کند. این دوره معمولا زمان شروع کار سیستم را در برمی‌گیرد و در آن شرایط اولیه روی تغییرات وضعیت سیستم تأثیر می‌گذارد. دورهٔ پایدار دوره‌ای است که تغییرات سیستم درآن مستقل از زمان و شرایط اولیهٔ سیستم است. شکل ۳.۵ نشان می‌دهد که میانگین یکی ازمعیارهای ارزیابی، درشروع کار سیستم درحال نوسان است؛ اما، پس از گذشت مدتی، تقریباً ثابت می‌ماند.

بدیهی است که شرایط دورهٔ گذرا، جز در مورد مطالعات خاص، نمی‌تواند مبنای ارزیابی سیستم قرار گیرد، بلکه آنچه اهمیت دارد تغییرات آن در درازمدت و دردورهٔ پایدار است. ازاین‌رو، درنظریهٔ صف بررسی معیارهای ارزیابی سیستم، دردورهٔ پایدار (در






**شکل ۳.۵** دوره‌های گذرا و پایدار

درازمدت) انجام می‌شود، اگرچه بررسیهای محدودی هم درزمینهٔ تغییرات سیستم دردورهٔ گذرا به عمل می‌آید. ضمناً باید درنظر داشت که مطالعهٔ سیستم دردورهٔ گذرا کاری بسیار مشکل، و درمورد بسیاری ازسیستمها، غیرممکن است.

همهٔ سیستمها لزوماً دارای دورهٔ پایدار نیستند. مثلا، اگر آهنگ ورود مشتری بیش از آهنگ خروج آن باشد، طول‌صف مرتباً افزایش می‌یابد و به‌سمت بینهایت میل‌می‌کند. چنین سیستمی هرگز به‌حالت پایدار نمی‌رسد.

## ۳.۵ رابطهٔ بین معیارهای ارزیابی یك سیستم صف

با استفاده ازشکل ۱.۵، می‌توان مدت زمان انتظار یك مشتری مشخص درسیستم و با صف وهمچنین تعداد مشتریهای سیستم را درهرلحظه تعیین‌کرد. بیکاری یا مشغول بودن خدمت‌دهندگان درزمانهای مختلف، نیز ازشکل ۲.۵ به‌دست می‌آید. بدیهی است‌که برای تعیین معیارهای ارزیابی سیستم، اطلاعات مربوط به یك مشتری خاص نمی‌تواند مدنظر باشد، بلکه اطلاعات مربوط به مجموعهٔ مشتریها ملاك ارزیابی تواند بود. باید توجه داشت‌که حتی یك مشتری مشخص هم، اگر دوبار به‌سیستم مراجعه‌کند، معمولا به دو نتیجه متفاوت می‌رسد، که علت آن ماهیت احتمالی متغیرهای سیستم است. ضمناً، همان‌طورکه گفته شد

معیارهای ارزیابی با توجه به‌شرایط دورهٔ پایدار(سیستم تعیین خواهد شد.

برای ارزیابی سیستم در درازمدت، معیارهای عمده عبارت‌اند از:

$L$ = میانگین تعداد مشتریان در سیستم در درازمدت

$L_q$ = میانگین تعداد مشتریان درصف در درازمدت

$W$ = میانگین مدت زمان انتظار یك مشتری درسیستم در درازمدت

$W_q$ = میانگین مدت زمان انتظار یك مشتری درصف در درازمدت

$\pi_n$ = احتمال بودن $n$ مشتری درسیستم در درازمدت

بدیهی است که معیارهای فوق در صورتی دارای معنا خواهد بود که سیستم به دورهٔ پایدار برسد. به‌بیان ریاضی، معیارهای فوق را می‌توان به‌شکل زیر بیان کرد:

$$L = \lim_{t\to\infty} \{EN(t)\} \qquad (۸.۵)$$

$$W = \lim_{t\to\infty} E \ (\text{مدت زمان انتظار یك مشتری درسیستم}) \qquad (۹.۵)$$

$$\pi_n = \lim_{t\to\infty} P_n(t) = \lim_{t\to\infty} P \ (\text{بودن } n \text{ مشتری درسیستم در لحظهٔ } t) \qquad (۱۰.۵)$$

$W_q$ و $L_q$ نیز به‌طریق مشابه تعریف می‌شوند.

### استنتاج لیتل

رابطه‌های بین معیارهای ارزیابی یك سیستم در دراز مدت، با استفاده از استنتاج لیتل، به‌ترتیب زیر، به‌دست می‌آید. این رابطه‌ها که در نظریهٔ صف اهمیت خاصی دارند، درمورد تمام سیستمهای صف صادق هستند.

$$L = \lambda W \qquad (۱۱.۵)$$

$$Lq = \lambda W_q \qquad (۱۲.۵)$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} \qquad (۱۳.۵)$$

در رابطهٔ فوق، $\lambda$ معرف آهنگ ورود مشتری، یا میانگین تعداد بالقوهٔ مشتریانی است که درواحد زمان وارد سیستم می‌شوند. همان‌طور که مشاهده می‌شود، به‌فرض ثابت بودن $\lambda$، $L$ و $W$ متناسب با یکدیگرند. به‌عبارت دیگر، هرچه میانگین‌مدت زمان انتظار مشتریان بیشتر باشد (یعنی سیستم شلوغتر باشد)، میانگین تعداد مشتریهای داخل سیستم نیز بیشتر می‌شود. از یك‌طرف، تعداد مشتریهایی که‌داخل‌سیستم‌هستند، مستقیماً بستگی به‌آهنگ ورود مشتریان دارد. از طرف دیگر، طبق رابطهٔ (۱۳.۵)، میانگین مدت زمانی که یك مشتری درسیستم



می‌گذراند، برابراست با میانگین مدت زمانی که درصف می‌گذراند به‌اضافه مدت‌زمانی که مشغول دریافت خدمت است.

دراینجا ازاثبات دقیق ریاضی استنتاج لیتل صرف‌نظر می‌کنیم. لیکن، برای روشن شدن موضوع، فرض کنید که سیستم درزمان $t$ باشد. برحسب تعریف، متوسط زمانی را که یك مشتری درسیستم گذرانیده است، $W$ می‌نامیم. براین اساس، کل زمانی که مشتریها تا لحظهٔ $t$ درسیستم گذرانیده‌اند، برابراست با:

تعداد مشتریهایی که تا این لحظه وارد سیستم شده‌اند ضرب در $W$،

$$W_1 \cdot X(t) \qquad (۱۴.۵)$$

از طرف دیگر، مجموع مدت زمانی که مشتریها در واحد زمان درسیستم صرف می‌کنند، برابر با میانگین تعداد مشتریان درسیستم است. درنتیجه، کل زمانی که مشتریها تا لحظهٔ $t$ درسیستم گذرانیده‌اند، برابراست با

$$E[N(t)] \cdot t \qquad (۱۵.۵)$$

از رابطه‌های (۱۴.۵) و (۱۵.۵) نتیجه می‌شود.

$$E[N(t)] = \frac{X(t)}{t} \cdot W_1 \qquad (۱۶.۵)$$

$X(t)/t$ بیانگرمتوسط تعداد مشتریهایی است که در واحد زمان (درفاصلهٔ صفر تا $t$) وارد سیستم شده‌اند و برحسب تعریف، آهنگ ورود مشتریان نامیده می‌شود.

$$\lambda = \lim_{t\to\infty} \frac{X(t)}{t} \qquad (۱۷.۵)$$

دررابطه (۱۶.۵)، اگر $t$ به‌سمت بینهایت میل کند، درواقع رابطهٔ اول لیتل، یعنی رابطهٔ (۱۱.۵) به‌دست می‌آید.

### رابطهٔ بین $L$ و $\pi_n$

باتوجه به‌اینکه $L$، برحسب‌تعریف، میانگین تعدادمشتریها درسیستم است و با درنظر گرفتن رابطهٔ کلی محاسبهٔ میانگین، می‌توان $L$ را به‌شرح زیرمحاسبه کرد:

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P(\text{بودن } n \text{ مشتری در سیستم}) = \sum_{n=0}^{\infty} n\pi_n \qquad (۱۸.۵)$$

### محاسبهٔ $L$ با استفاده از تبدیل $z$

اگر تبدیل $z$ احتمالات حدی را با $P(z)$ نشان دهیم، یعنی

$$P(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\pi_n z^n$$

$$L=\left.\frac{dP(z)}{dz}\right|_{z=1} \qquad (۱۹.۵)$$

زیرا

$$\frac{dP(z)}{dz}=\sum_{n=0}^{\infty}n\pi_n z^{n-1}$$

اگر $z=1$ باشد، رابطهٔ (۱۹.۵) به‌رابطهٔ (۱۸.۵) تبدیل می‌شود. به‌همین ترتیب

$$Lq=\sum_{n=0}^{\infty}n\cdot P(\text{بودن } n \text{ مشتری در صف})$$

ازطرف دیگر، درسیستمی با $m$ خدمت‌دهنده، اگرجمعیت مشتریان برابر با $n$ باشد، طول صف برابر با $(n-m)$ خواهد بود، لذا

$$Lq=\sum_{n=m}^{\infty}(n-m)\pi_n \qquad (۲۰.۵)$$

## ۴.۵ دورهٔ بیکاری و دورهٔ مشغول بودن یك سیستم صف

هرسیستم صف مدتی **بیکار** می‌ماند. این دوره ازخروج آخرین مشتری شروع می‌شود و با ورود اولین مشتری‌بعدی پایان می‌یابد. پس‌از آن، **دورهٔ مشغول بودن** سیستم شروع می‌شود و ادامه‌می‌یابد تا زمانی‌که تمام مشتریها ازسیستم‌خارج شوند. آن‌گاه، **دورهٔ بیکاری** مجدداً آغاز می‌گردد و همین روند ادامه می‌یابد. مجموعهٔ یك دورهٔ بیکاری ومشغول‌بودن را یك **چرخهٔ اشتغال** سیستم‌می‌گویند. درشکل ۴.۵ دوره‌های‌بیکاری با $I_1, I_2, \ldots, I_n$ و دوره‌های کار با $B_1, B_2, \ldots, B_n$ نشان داده شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، سیستم به‌طور متناوب دوره‌های بیکاری و مشغول بودن را می‌گذراند. اولین چرخهٔ اشتغال سیستم، مدت زمان $I_1+B_1$ و $n$ امین چرخهٔ آن $I_n+B_n$ است. با توجه به تصادفی‌بودن زمانهای ورود مشتری و مدت خدمت، بدیهی است که دوره‌های بیکاری ومشغول‌بودن (و طبیعتاً چرخه‌های‌اشتغال) معمولاً متغیر تصادفی‌هستند. اگر در درازمدت، $P_b$ را درصدی ازاوقات بدانیم‌که سیستم مشغول به‌کار است.


**شکل ۴.۵** دوره‌های بیکاری و مشغول‌بودن و چرخه‌های اشتغال



$$P_b=\lim_{n\to\infty}\frac{B_1+B_2+\cdots+B_n}{I_1+B_1+I_2+B_2+\cdots+I_n+B_n} \qquad (۲۱.۵)$$

در حالتی که متغیرهای تصادفی $I_1, I_2, \ldots, I_n$ مستقل و دارای توزیع یکسان و همچنین $B_1$ و $B_2$ و... نیزدارای همین خاصیت باشند، طبق قانون اعداد بزرگ خواهیم‌داشت:

$$P_b=\frac{E(B)}{E(I)+E(B)} \qquad (۲۲.۵)$$

که $E(I)$ و $E(B)$ به‌ترتیب معرف میانگین دورهٔ بیکاری و دورهٔ مشغول بودن سیستم در دراز مدت هستند ومقدار آنها برای مدلهای خاص در فصلهای بعدی محاسبه خواهد شد.

به‌همین‌ترتیب، درصد بیکاری سیستم در درازمدت برابر با $1-P_b$ است. ازطرف دیگر، طبق تعریف، درصدی اززمان‌که سیستم فاقد مشتری است را با $\pi_0$ نشان می‌دهیم. بنابراین، تحت شرایط فوق،

$$\pi_0=\frac{E(I)}{E(I)+E(B)} \qquad (۲۳.۵)$$

## ۵.۵ ضریب بهره‌وری

همان‌طور که قبلا گفتیم، یکی از معیارهای ارزیابی سیستم درصدی اززمان است‌که سیستم کار می‌کند. برای نشان دادن این معیار، ازعاملی به‌نام **ضریب بهره‌وری** استفاده می‌شود، که تعریف آن به‌شرح زیراست:

$$\rho=\frac{\text{میانگین کل تقاضا برای دریافت خدمت در واحد زمان}}{\text{کل ظرفیت سیستم برای ارائهٔ خدمت در واحد زمان}} \qquad (۲۴.۵)$$

طبق این تعریف، هرچه مقدار $\rho$ بزرگتر باشد، تقاضا زیادتراست وسیستم باید کار بیشتری انجام دهد وصف طولانیتر خواهدشد. برعکس، هرچه $\rho$ کوچکتر باشد، طول صف کوتاهتر است، اما درمقابل، ازامکانات سیستم استفاده‌کمتری به‌عمل می‌آید.

**قضیهٔ ۱.۵** دریك سیستم صف با $m$ خدمت‌دهنده، که $\lambda$ و $\mu$ به‌ترتیب معرف آهنگ ورود و آهنگ خدمت است، ضریب بهره‌وری ازرابطهٔ زیربه‌دست می‌آید:

$$\rho=\frac{\lambda}{m\mu} \qquad (۲۵.۵)$$

اثبات: برای محاسبهٔ $\rho$ در رابطهٔ (۲۴.۵)، واحد سنجش صورت و مخرج کسر را تعداد مشتریان درنظر می‌گیریم. درنتیجه،

صورت کسر = (میانگین مشتریانی‌که درواحد زمان مراجعه می‌کنند) $\lambda$

مخرج = (میانگین تعداد خدمت‌دهنده) × (میانگین ظرفیت خدمت‌دهی یك‌خدمت‌دهنده)

$=(m)(\mu)$

بدیهی است که $\rho > 1$ بدین معناست که ظرفیت سیستم از تقاضای وارده به‌آن کمتر است وطول صف مرتب افزایش می‌یابد تا سرانجام به‌بینهایت می‌رسد. ضمناً، در بسیاری از حالتها نشان داده می‌شود که $\rho = 1$ نیز مربوط به‌یك سیستم ناپایدار است. بدین‌ترتیب، معمولا موقعی سیستم پایدار است که $\rho > 1$ باشد.

$\rho < 1$

## ۶.۵ سیستمهای صف‌قطعی

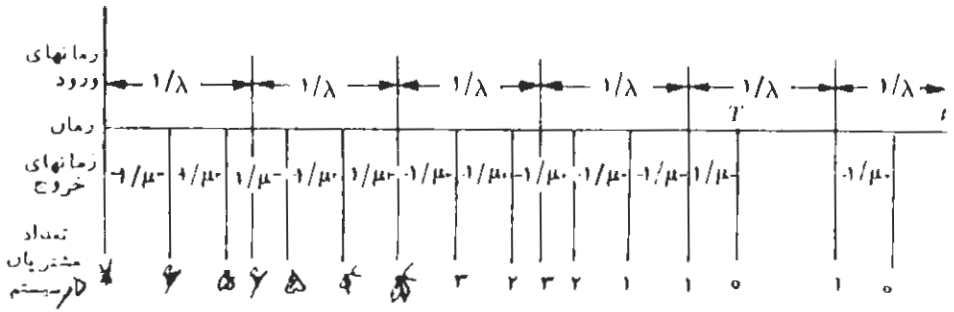
دراین بخش، برای تشریح یك سیستم صف، حالت خاصی را بررسی می‌کنیم که تمام متغیرهای آن قطعی است. معمولا، زمان بین دو ورود متوالی مشتریها وهمچنین مدت‌زمان ارائهٔ خدمت، متغیرهای تصادفی هستند. درسیستمهای صف قطعی، دومتغیر فوق همواره قطعی فرض می‌شود. به‌بیان ریاضی می‌توان گفت که دراین سیستمها، زمان بین دو ورود متوالی مشتریها و همچنین مدت‌زمان خدمت، متغیرهای تصادفی هستند که واریانس آنها برابر با صفراست.

مطابق با قراردادهایی که‌درفصل اول تشریح شد، سیستمهای قطعی را درحالت کلی با $D/D/\ldots$ نشان می‌دهند. آهنگ ورود مشتری، طبق معمول با $\lambda$ و آهنگ خدمت با $\mu$ بیان می‌شود. اگرمشتریها به‌طورانفرادی واردسیستم شوند و به‌گونه‌ای انفرادی هم‌خدمت دریافت کنند، مدت‌زمان بین دو ورود متوالی مشتریها دقیقاً برابر با $1/\lambda$ ومدت‌زمان دریافت خدمت نیز برابر با $1/\mu$ خواهد بود.

ابتدا حالت سادهٔ $D/D/1$ را درنظربگیرید. طبق قرارداد، دراین سیستم یك خدمت‌دهنده وجود دارد، و محدودیتی نیز ازنظر ظرفیت سیستم و جمعیت مشتریان مطرح نیست. بدیهی است که سیستم درصورتی می‌تواند در درازمدت پایدار بماند که $\rho < 1$ یا $\lambda < \mu$ باشد.

به‌عبارت دیگر، سرعت‌خدمت‌دهی درچنین شرایطی باید بیش ازتقاضا برای دریافت خدمت باشد. درغیر این‌صورت، طول صف مرتباً افزایش می‌یابد و به‌بینهایت خواهد رسید. فرض کنیدکه درلحظهٔ شروع کارسیستم، $n$ مشتری آمادهٔ دریافت خدمت باشند واز آن پس، زمان بین دو ورود $1/\lambda$ باشد. درابتدا، برای ارائهٔ خدمت به مشتریهایی که منتظر هستند، خدمت‌دهنده باید مرتباً کار کند. پس از مدتی که خدمات معوقه ارائه شد، فقط به مشتریان جدید خدمت داده می‌شود. به عبارت دیگر، از لحظهٔ شروع اشتغال سیستم، تا زمان مشخصی، مثلا $T$، خدمت‌دهنده دائماً مشغول به‌کاراست واز آن پس درصدی ازاوقات را کار می‌کند (که با $\rho$ نشان داده می‌شود). شکل ۵.۵ معرف این سیستم است. در این سیستم فرض شده است که درلحظهٔ شروع کارسیستم $K$ مشتری درصف منتظر دریافت خدمت بوده‌اند. همان‌طورکه مشاهده می‌شود، ازلحظهٔ صفر تا $T$، خدمت‌دهنده مرتباً درحال ارائهٔ خدمت است. از این لحظه به‌بعد، مدتی کارمی‌کند وسپس بیکار می‌ماند. درشکل فوق دورهٔ مشغول‌بودن $1/\mu$ و دورهٔ بیکاری $(1/\lambda - 1/\mu)$ وچرخهٔ اشتغال سیستم به‌مدت $1/\lambda$






**شکل ۵.۵** زمانهای ورود و خروج وتعداد مشتریان درمدل $D/D/1$

است. دراین سیستم، دورهٔ گذرا $T$ است و پس از آن دورهٔ پایدار شروع می‌شود. دردورهٔ پایدار هیچ مشتری درصف منتظر نمی‌ماند و صفی نیز تشکیل نمی‌شود. بدین‌ترتیب، رابطه‌های لیتل نیز برقرار خواهد بود. طول مدت دورهٔ گذرا، $T$، از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.

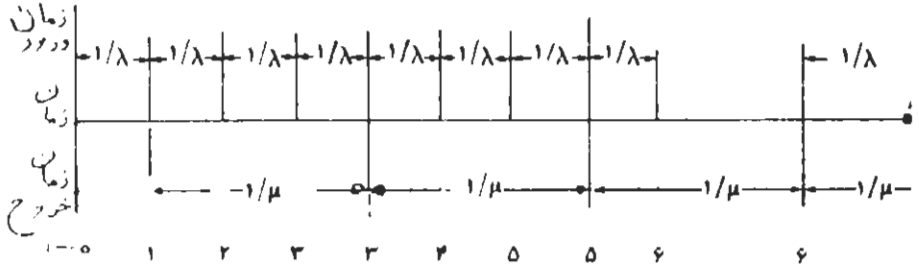
$$[\lambda T] + n = [\mu T] \qquad (۲۶.۵)$$

که $n$ تعداد مشتریهای اولیه است. منظور از $[x]$ مقدار گردشدهٔ $x$ به‌عدد صحیح است، به‌طوری که

$$x - 1 \leqslant [x] \leqslant x$$

حال مدل $D/D/1/K$، که در آن ظرفیت سیستم متناهی، و برابر با $K$ است، را درنظر بگیرید. دراین سیستم هم مشتریها با آهنگ $\lambda$ مراجعه می‌کنند. لیکن، همه آنها لزوماً وارد سیستم نمی‌شوند، زیرا هنگامی که سیستم دارای $K$ مشتری باشد، از پذیرش مشتری جدید خودداری می‌کند واین مشتری نمی‌تواند درصف منتظر بماند وبه ناچار از دریافت خدمت محروم خواهد ماند. به‌این‌ترتیب، آهنگ ورود مشتریان کمتر از $\lambda$ است که‌آن را با $\bar{\lambda}$ نشان‌می‌دهیم. بنابراین، درواحد زمان به‌طورمتوسط تعداد $(\lambda - \bar{\lambda})$ مشتری از ورود به‌سیستم بازمی‌مانند. برای اینکه سیستم به‌حالت پایدار برسد، فقط لازم است‌که $\bar{\lambda}$ (ونه $\lambda$) از $\mu$ کوچکتر باشد.

برای سهولت محاسبات، فرض کنیدکه درلحظهٔ شروع‌کار سیستم تعداد مشتریهایی که منتظر می‌مانند برابر با صفر درنظر گرفته شود. ضمناً، فرض می‌کنیم که $\lambda > \mu$ باشد. (درحالتی که $\lambda < \mu$ باشد، ورود و خروج مشتریها دقیقاً مانند حالت $D/D/1$ است، که قبلا مورد بررسی قرار گرفت). شکل ۶.۵ این سیستم را بیان می‌کند. در این سیستم فرض شده است که $\lambda = 3\mu$ و $K = 6$ اولین مشتری در زمان $1/\lambda$ وارد می‌شود




**شکل ۶.۵** زمانهای ورود و خروج و تعداد مشتریان در مدل $D/D/1/6$

و بلافاصله ارائهٔ خدمت به‌او شروع می‌شود. چون آهنگ خدمت‌دهی کندتر از آهنگ ورود مشتری است، لذا مرتباً به‌طول صف اضافه‌می‌شود تاموقعی که‌سیستم پرشود (یعنی $N(t)=6$) دراین هنگام، ازورود مشتری‌جلوگیری به‌عمل‌می‌آید. ازاین‌لحظه به‌بعد، با خروج یك مشتری، مشتری جدیدی وارد سیستم می‌شود واین‌کار ادامه می‌یابد. دراین مدل نیز طول دورهٔ گذرا، $T$، ازرابطهٔ زیر به‌دست می‌آید (با فرض اینکه $\lambda/\mu$ برابر عدد صحیحی مانند $m$ باشد).

$$T=\frac{K}{\lambda-\mu} \qquad (۲۷.۵)$$

همان طور که مشاهده می‌شود، بعد از دورهٔ گذرا، تعداد مشتریان داخل سیستم همواره برابر $K$ است، اما قبل از آن، تعداد مشتریان ازرابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.

$$N(t)=X(t)-X'(t)=[\lambda t]-\left[\frac{t-1/\lambda}{1/\mu}\right]=[\lambda t]-[\mu t-\mu/\lambda] \qquad (۲۸.۵)$$

بنابراین، به‌طورخلاصه اگر $t\leqslant 1/\lambda$ باشد ،

$$N(t)=\begin{cases} 0 & \\ [\lambda t]-[\mu t-\mu/\lambda] & \text{اگر } 1/\lambda\leqslant t\leqslant T \\ K & \text{اگر } t>T \end{cases}$$

به‌این‌ترتیب، باتوجه به‌شکل ۶.۵ مشاهده می‌شود که بعد ازدورهٔ گذرا، که $T$ است، تعداد مشتری درسیستم همواره $K$ باقی می‌ماند. درهمین مثال، از هر سه مشتری که مراجعه‌کنند، دقیقاً یکی ازآنها وارد سیستم می‌شود و دو مشتری دیگر از ورود باز می‌مانند. بنابراین، $\bar{\lambda}=\frac{\lambda}{3}$ و $\rho=(\lambda/\mu)=1$. برای نشان دادن صحت رابطهٔ لیتل باید توجه داشت که در درازمدت $L=6$ است. مدت‌زمان انتظاریك مشتری برابر با $6/\mu$ است، زیرا در



لحظهٔ ورود یك مشتری دقیقاً ۵ مشتری دیگر در سیستم هستند واین مشتری باید صبر کند تا آنها خارج‌شوند، یعنی $W_q=5/\mu$ و به‌همین‌ترتیب $W=6/\mu$. درنتیجه با درنظر گرفتن فرض $\lambda=3\mu$، نتیجه می‌شود،

$$\bar{\lambda}W=\frac{\lambda}{3}\cdot\frac{6}{\mu}=2\frac{\lambda}{\mu}=6$$

## مسائل

۱. دریك سیستم صف با دوخدمت دهنده، ورود و خروج مشتریها طبق جدول زیراست. فرض می‌کنیم که انتخاب مشتری درصف براساس نوبت باشد. میانگین زمان انتظار مشتریها، طول‌صف، وتعداد افرادی‌که در حال گرفتن خدمت هستند، آهنگ ورود مشتری و آهنگ خدمت‌دهی را محاسبه‌کنید. نمودار جمعیت مشتریان را نسبت به‌زمان رسم‌کنید.

| شمارهٔ مشتری | ساعت ورود | ساعت خروج |
|---|---|---|
| ۱ | ۱ | ۱ : ۳۰ |
| ۲ | ۱ : ۱۰ | ۱ : ۲۵ |
| ۳ | ۱ : ۲۰ | ۱ : ۴۰ |
| ۴ | ۱ : ۳۵ | ۱ : ۵۵ |
| ۵ | ۲ : ۱۰ | ۲ : ۴۰ |
| ۶ | ۲ : ۱۵ | ۲ : ۳۵ |
| ۷ | ۲ : ۲۰ | ۲ : ۵۵ |
| ۸ | ۲ : ۳۰ | ۲ : ۵۸ |
| ۹ | ۳ : ۰۵ | ۳ : ۳۵ |
| ۱۰ | ۳ : ۰۸ | ۳ : ۲۰ |
| ۱۱ | ۳ : ۱۵ | ۳ : ۳۲ |
| ۱۲ | ۳ : ۱۹ | ۳ : ۴۰ |
| ۱۳ | ۳ : ۳۶ | ۰۰۰۰ |

۲. در یك سیستم $D/D/1/7$ آهنگ خدمت دهی برابر با یك پنجم و آهنگ مراجعه مشتری برابر با یك سوم است. میانگین زمان انتظار هر مشتری در صف، در دراز مدت، چیست؟ ضریب بهره‌وری را محاسبه کنید. صحت رابطه‌های روابط لیتل را نشان دهید. آیا این سیستم حالت پایدار دارد؟

۳. ثابت کنید که در هر سیستم صف با یك خدمت دهنده، همیشه رابطه‌های زیر برقرار است:

$$1)\ \pi_0 = 1-\rho \qquad 2)\ L = L_q + (1-\pi_0) \qquad 3)\ L = L_q + \rho$$

# ٦

# مدلهای نمایی در سیستمهای صف

## مقدمه

منظور از مدلهای نمایی، مدلهایی است که در آنها، دو متغیر تصادفی زیر دارای توزیع نمایی باشد:

الف. زمان بین دو ورود متوالی مشتریها

ب. مدت خدمت

مدلهای نمایی از مهمترین نمونه‌های سیستمهای صف هستند. اهمیت آنها از آنجا ناشی می‌شود که از نظر محاسباتی ساده‌ترین مدلها محسوب می‌شوند و درعین حال، بسیاری از مسائل واقعی را می‌توان درچارچوب آنها گنجانید.

طبق آنچه که درفصل اول گفته شد، برای بیان سیستمهای صف و طبقه‌بندی آنها، ازقراردادی بشکل $A/B/m/K/C/Z$ استفاده می‌شود. اگر زمان بین‌دو ورود متوالی مشتریها دارای توزیع نمایی باشد، حرف $M$ جایگزین $A$ می‌شود. به همین ترتیب، در صورتی که‌مدت خدمت هم‌نمایی باشد، به‌جای حرف $B$ حرف $M$ قرارمی‌گیرد. بنابراین، مدلهای نمایی، به طور کلی، به صورت $M/M/\ldots$ نشان داده می‌شوند. در نظریهٔ صف، به‌مدلهای نمایی فرایند تولد و مرگ هم می‌گویند.

دراین فصل، ویژگیهای عمومی مدلهای نمایی درحالت کلی وخصوصیات آنها در حالات خاص را مورد بررسی قراردهیم.

## ۱.۶ فرایند تولد و مرگ

برای تشریح این فرایند، جمعیتی را درنظر بگیرید که تعداد آن هر لحظه می‌تواند افزایش یابد (تولد)، و یا از آن کاسته گردد (مرگ). دریك سیستم صف، مشتریهای داخل سیستم معرف جمعیت فوق‌الذکر است. در فرایند تولد و مرگ، ورود مشتری جدید درحکم تولد وخروج یکی ازمشتریها (پس ازدریافت خدمت)، در حکم مرگ محسوب می‌شود. ضمناً، ویژگی عمدهٔ فرایند تولد و مرگ این‌است که‌فاصلهٔ زمانی بین دوتولد یا دومرگ براساس توزیع‌نمایی است. به‌عبارت‌دیگر، دراین‌فرایند، تعداد تولدها یامرگها دریك فاصلهٔ‌زمانی مشخص براساس فرایندپواسون است. به‌تعبیردقیقتر، فرایندتولد ومرگ براساس فرضهای زیر ایجاد می‌شود.

**فرض ۱.** یك لحظهٔ مشخص را درنظر بگیرید، که جمعیت سیستم درآن برابر با $n$ باشد. مدت‌زمانی که طول می‌کشد تا یك تولد صورت گیرد (یك مشتری جدید واردشود)، متغیری تصادفی با توزیع نمایی و پارامتر $\lambda_n$ است. به‌عبارت دیگر، احتمال ورود یك مشتری درفاصلهٔ کوتاه $\Delta t$ متناسب با طول $\Delta t$ و $\lambda_n$ و به‌طور دقیقتر برابر است با $\lambda_n\Delta t+\theta(\Delta t)$. به همین ترتیب، احتمال ورود بیش ازیك مشتری در فاصلهٔ کوتاه $\Delta t$، صفر، یا به‌طور دقیقتر برابر با $\theta(\Delta t)$ است. آهنگ ورود مشتری (یا آهنگ تولد)، یعنی $\lambda_n$، می‌تواند به‌جمعیت سیستم بستگی داشته باشد، ولی مستقل اززمان فرض می‌شود. $\lambda_n$ لزوماً برابر با صفر نیست

**فرض ۲.** یك لحظهٔ مشخص را در نظر بگیرید که درآن جمعیت سیستم برابر با $n$ باشد. مدت‌زمانی که طول می‌کشد تا یك مرگ صورت گیرد (یا یك مشتری خارج شود). متغیری تصادفی با توزیع نمایی و پارامتر $\mu_n$ است. آهنگ خروج مشتری (یا مرگ)، یعنی $\mu_n$، نیز می‌تواند به جمعیت سیستم بستگی داشته باشد، ولی مستقل اززمان فرض می‌شود. $\mu_n$ برابر با صفر است زیرا جمعیت منفی معنا ندارد.

بنابراین، ازفرضهای ۱ و ۲ نتیجه می‌شود که درفرایند تولد ومرگ، درهرلحظه حداکثر یك مشتری وارد یاخارج می‌شود. علت این امراین است که ورود وخروج مشتریها طبق فرایند پواسون است. می‌دانیم که دریك فرایند پواسون، دو پیشامد همزمان نمی‌تواند رخ دهد.

آهنگ تولد (یا ورود مشتری)، یعنی $\lambda_n$، و همچنین آهنگ مرگ، یعنی $\mu_n$، در سیستمهای مختلف می‌توانند متفاوت باشد. یك حالت خاص، $\lambda_n=\lambda$ یا $\mu_n=\mu$ (به‌ازای $n=1,2,\ldots$) است. درحالت خاص دیگر، $\lambda_n=n\lambda$ و یا $\mu_n=n\mu$ است. دراین حالت، متناسب با افزایش جمعیت، آهنگ ورود یا خروج نیز افزایش می‌یابد.

طبق فرضهای فوق، درمدت زمان کوتاه، جمعیت مشتریهای داخل سیستم حداکثر یك نفر افزایش یا کاهش می‌یابد، مشروط براینکه طبق فرایند تولد ومرگ عمل کند.



## ۲.۶ بیان فرایند تولد ومرگ درچارچوب زنجیرهٔ مارکوف

تعداد مشتری داخل سیستم را دریك لحظه، حالت سیستم تعریف کنید. طبق خاصیت فرایند تولد ومرگ، افزایش یاکاهش این تعداد مشتری، فقط بستگی به‌حالت سیستم دارد ومستقل از گذشتهٔ آن است، بنابراین، خاصیت مارکوفی بودن درمورد این فرایند صادق است. ضمناً، مدت زمانی هم‌که طول‌می‌کشد تاحالت سیستم تغییر کند، متغیری تصادفی با توزیع نمایی است. به‌این‌ترتیب، این فرایند درچارچوب زنجیرهٔ مارکوف پیوسته قرارمی‌گیرد.

برای مشخص‌کردن ماتریس آهنگ‌گذار، باید عناصر این ماتریس، یعنی $q_{ij}$ را، به‌ازای تمام مقادیر $i$ و $j$، محاسبه‌کرد. می‌دانیم‌که طبق تعریف، به‌ازای $i\neq j$،

$$q_{ij}=\lim_{\Delta t\to\infty}\frac{p(\text{تغییرحالت سیستم از } i \text{ به } j\text{، درمدت } \Delta t)}{\Delta t}$$

بنابراین، اگر $j=i+1$ باشد (یك تولد)،

$$q_{i,i+1}=\lambda_i \qquad (1.6)$$

واگر $j=i-1$ باشد (یك مرگ)،

$$q_{i,i-1}=\mu_i \qquad (2.6)$$

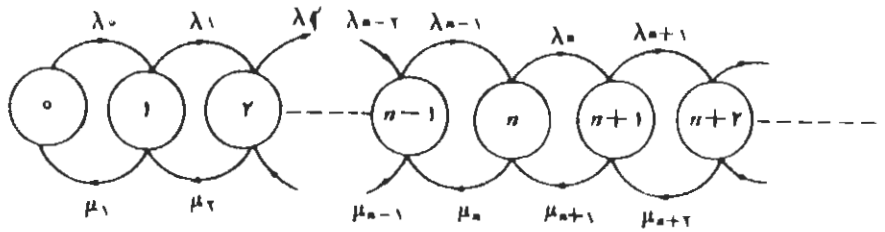
وجود خواهد داشت. در سایر موارد

(۳.۶) اگر $j\neq i-1$ یا $j\neq i+1$ باشد، $q_{ij}=0$ خواهد بود.

به این‌ترتیب، ماتریس آهنگ گذار فرایند تولد ومرگ به‌شکل زیر درمی‌آید.

$$Q=\begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mu_1 & -(\mu_1+\lambda_1) & \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & -(\mu_2+\lambda_2) & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \end{bmatrix} \qquad (4.6)$$

به‌جای استفاده از ماتریس فوق، می‌توان از نمودارآهنگ برای نشان‌دادن فرایند مارکوف استفاده کرد. چنین نمودار آهنگی درشکل ۱.۶ نشان داده شده‌است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، در فرایند تولد ومرگ، از یك حالت، تنها می‌توان به‌حالتهای مجاور آن حرکت کرد.




**شکل ۱.۶** نمودار آهنگ درفرایند تولد و مرگ

**معادلهٔ تعادلی درسیستمهای نمایی**

همان‌طور که قبلا گفته شد، $\pi_n$ معرف این حالت است که در درازمدت $n$ مشتری درسیستم باشد. به‌عبارت دیگر، $\pi_n$ نشان‌دهندهٔ درصدی از زمان است که سیستم دارای $n$ مشتری است. به‌بیان ریاضی

$$\pi_n = \lim_{t \to \infty} p[N(t)=n] \qquad (۵.۶)$$

برای محاسبهٔ $\pi_n$ درفرایند تولد و مرگ، شکل ۱.۶ به‌کار گرفته می‌شود. ابتدا از حالت صفر، که هیچ مشتری درسیستم وجود ندارد، شروع می‌کنیم. همان طور که نمودار آهنگ نشان می‌دهد، حالت سیستم فقط درصورتی تغییر می‌کند که یك مشتری جدید وارد شود. دراین صورت، حالت سیستم نیز «یك» خواهد شد. تغییر حالت سیستم ازصفر به‌یك (یعنی ورود یك مشتری) با آهنگ $\lambda_0$ انجام می‌شود. به‌همین‌ترتیب، با درنظر گرفتن این مطلب که ورود به‌حالت صفرنیز فقط با تغییر حالت سیستم از یك به‌صفر امکانپذیر است، آهنگ ورود به‌این حالت نیز برابر با $\mu_1$ خواهد بود. درنتیجه، معادلهٔ تعادلی درحالت صفر برابراست با

$$\lambda_0 \pi_0 = \mu_1 \pi_1 \qquad (۶.۶)$$

اکنون حالت ۱ را درنظر بگیرید. تغییر حالت سیستم، به دو طریق، ورود مشتری جدید (با آهنگ $\lambda_1$) یا خروج تنها مشتری داخل سیستم (با آهنگ $\mu_1$) میسر است. از طرف دیگر، از دوطریق نیز می‌توان به‌حالت ۱ رسید: از حالت صفر با ورود یك مشتری یا از حالت ۲ با خروج یکی ازمشتریهای داخل سیستم. بنابراین، معادلهٔ تعادلی برای این حالت عبارت است از:

$$(\lambda_1+\mu_1)\pi_1 = \lambda_0\pi_0 + \mu_2\pi_2 \qquad (۷.۶)$$

به‌همین ترتیب، معادلهٔ تعادلی برای حالت $n$ به‌شرح زیرخواهد بود:



$$(\lambda_n+\mu_n)\pi_n = \lambda_{n-1}\pi_{n-1} + \mu_{n+1}\pi_{n+1} \qquad (۸.۶)$$

با استفاده از رابطه‌های (۶.۶) و (۷.۶) و (۸.۶) نتیجه می‌شود:

$$\pi_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1}\pi_0 \qquad (۹.۶)$$

$$\pi_2 = \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2}\pi_0 \qquad (۱۰.۶)$$

.
.
.
.

$$\pi_n = \frac{\lambda_0\lambda_1 \cdots\cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2 \cdots\cdots \mu_n}\pi_0 \qquad (۱۱.۶)$$

برای سهولت از قرارداد زیر استفاده می‌کنیم.

$$C_n = \frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n} \qquad n = 1, 2, \ldots \qquad (۱۲.۶)$$

درنتیجه رابطهٔ (۱۱.۶) را می‌توان به‌صورت زیرخلاصه کرد:

$$\pi_n = C_n\pi_0 \quad , \quad n = 1, 2, \ldots \qquad (۱۳.۶)$$

ازطرف دیگر می‌دانیم که

$$\sum_{n=0}^{\infty}\pi_n = 1$$

یا

$$\pi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n\pi_0 = \pi_0\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}C_n\right] = 1$$

درنتیجه

$$\pi_0 = \frac{1}{1+\sum_{i=1}^{\infty}C_i} \qquad (۱۴.۶)$$

به این ترتیب، با استفاده از رابطه‌های (۱۲.۶) و (۱۳.۶) و (۱۴.۶) تابع توزیع تعداد مشتری در سیستم، در درازمدت، به‌دست می‌آید.

### شرط پایدار بودن سیستمهای نمایی

با توجه به رابطهٔ (۱۴.۶)، ملاحظه می‌شود که درصورتی $\pi_0$ مثبت است که $\sum_{i=1}^{\infty} C_i$ متناهی، یعنی سری $C_1$ و $C_2$ و... همگرا باشد. اگر چنین نباشد $\pi_0 = 0$ خواهد بود. به‌همین ترتیب، از رابطهٔ (۱۳.۶) نتیجه می‌شود که به‌ازای تمام مقادیر $n$، $\pi_n = 0$ است. در نتیجه، احتمال اینکه سیستم خالی یا دارای $n$ مشتری باشد ($n = 1, 2, \ldots$)، برابر با صفر است. معنای این موضوع این است که در درازمدت، تعداد مشتریهای داخل سیستم از هر عددی مانند $n$ بیشتر (یعنی برابر با بینهایت) است. درچنین حالتی سیستم ناپایدار است. بنابراین، در فرایند تولد و مرگ شرط پایداری سیستم این است که

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n < \infty \qquad (۱۵.۶)$$

### محاسبهٔ معیارهای ارزیابی مدلهای نمایی

پس از محاسبهٔ $\pi_0$ و $\pi_n$ (به‌ازای $n = 1, 2, \ldots$)، میانگین تعداد مشتری در سیستم، یعنی $L$ از رابطهٔ (۱.۵) به‌دست می‌آید. آن‌گاه، با استفاده از روابط موسوم به استنتاج لیتل، یعنی رابطهٔ (۱۱.۵)، معیار دیگر ارزیابی، میانگین مدت زمان انتظار مشتری در سیستم یا $W$ به‌دست می‌آید. به‌همین ترتیب، $L_q$ و $W_q$ را می‌توان با کمک روابط (۱۲.۵) و (۱۳.۵) محاسبه کرد.

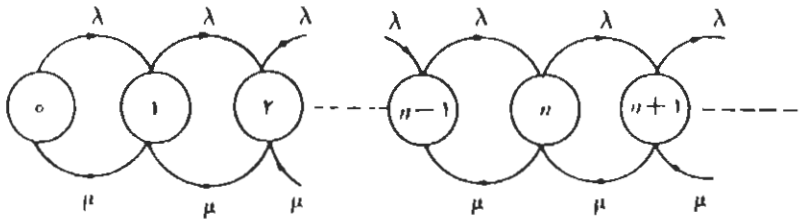
### بررسی نمونه‌های خاص مدلهای نمایی

در ادامهٔ این بخش، انواع مدلهای نمایی را بررسی و معیارهای ارزیابی آنها را به‌دست می‌آوریم. برای تعیین این معیارها، ابتدا $\lambda_n$ و $\mu_n$ را به‌ازای $n$های مختلف مشخص و $\pi_0$ و $\pi_n$ را محاسبه می‌کنیم. آن‌گاه به‌بررسی $L$ و $W$ وسایر عوامل می‌پردازیم. در تمام این مدلها فرض می‌کنیم که زمان بین دو ورود متوالی مشتریها وهمچنین خدمت‌نمایی است.

## ۳.۶ مدل $M/M/1$

این مدل متداولترین نمونهٔ مدل صف است، که به مدل کلاسیک نیزموسوم است. دراین‌مدل ورود مشتریها طبق‌فرایند پواسون با پارامتر $\lambda$ است. آهنگ ورود مشتری مستقل ازجمعیت






**شکل ۲.۶** نمودار آهنگ مدل کلاسیک

داخل سیستم فرض می‌شود. لذا، به‌ازای $n = 0, 1, 2, \ldots$، $\lambda_n = \lambda$ است. ازطرف دیگر، چون یک خدمت‌دهنده بیشتر وجود ندارد، آهنگ خروج مشتریان برابر با آهنگ خدمت خواهد بود. در نتیجه، به‌ازای $n = 1, 2, \ldots$، $\mu_n = \mu$ است. دراین مدل، $\mu_0 = 0$ فرض شده است، زیرا درصورتی که مشتری درسیستم نباشد، خدمت‌دهی هم وجود ندارد.

نمودار آهنگ این مدل مطابق شکل ۲.۶ است.

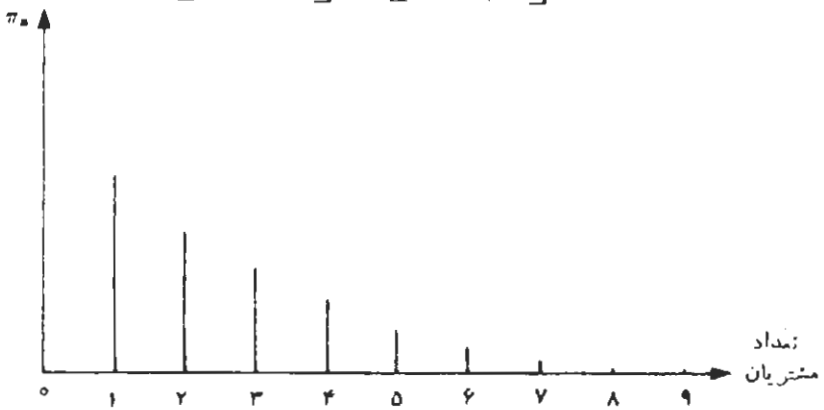
براساس رابطهٔ (۱۲.۶)
$$C_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots\cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots\cdots \mu_n} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

اما برحسب تعریفی که از ضریب بهره‌وری به‌عمل آمد، $\rho = \lambda/\mu$ است.

$$C_n = \rho^n \qquad (۱۶.۶)$$

درنتیجه، بافرض $\rho < 1$

$$\pi_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n\right]^{-1} = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n\right]^{-1} = 1 - \rho \qquad (۱۷.۶)$$




**شکل ۳.۶** احتمال تعداد مشتریهای داخل سیستم در درازمدت، مدل $M/M/1$

و

$$\pi_n = C_n \rho^n_0 = (1-\rho)\rho^n \qquad (۱۸.۶)$$

شکل ۳.۶، احتمال تعداد مشتریهای داخل سیستم را در درازمدت نشان می‌دهد.

**مثال ۱.۶** کتابخانه‌ای عمومی که فقط یك کتابدار دارد را درنظر بگیرید. اعضای کتابخانه طبق فرایند پواسون با میانگین ۱۰ نفر درساعت وارد می‌شوند. مدت زمانی که طول می‌کشد تا این کتابدار به تقاضای یك عضو رسیدگی کند، متغیری تصادفی با میانگین ۵ دقیقه است. درچند درصد وقت، این کتابدار بیکار است؟ احتمال اینکه ۳ نفر منتظر باشند تا کتابدار به‌تقاضای آنها رسیدگی کند، چقدر است؟

حل: دراین‌مدل $\lambda = 10$ و $\mu = 12$ است. به‌عبارت دیگر، به‌طورمتوسط درهرساعت ده‌نفر وارد کتابخانه می‌شوند و کتابدار ظرفیت ارائهٔ خدمت به ۱۲ نفر درساعت را دارد. بدین ترتیب

$$\rho = \frac{10}{12}$$

درصد بیکاری کتابدار برابر با $\pi_0$ است و طبق رابطهٔ (۱۷.۶) به‌دست می‌آید.

$$\pi_0 = 1 - \rho = \frac{1}{6}$$

احتمال اینکه سه نفر منتظر دریافت خدمت از کتابدار باشند، برابر با $\pi_4$ است، زیرا اگر ۴ نفر درسیستم باشند، یکی از آنها مشغول دریافت خدمت است و سه نفر دیگر درصف منتظر هستند. طبق رابطهٔ (۱۸.۶)

$$\pi_4 = (1-\rho)\rho^4 = \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0.08$$

**محاسبهٔ $L$**

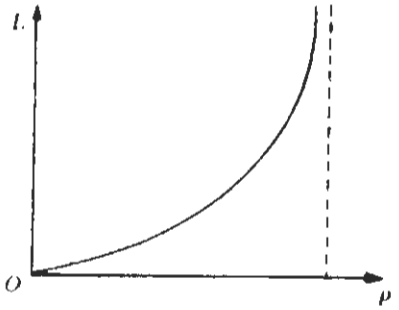
$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n\pi_n = \sum_{n=0}^{\infty} n(1-\rho)\rho^n = (1-\rho)\,\rho \sum_{n=0}^{\infty} n\rho^{n-1}$$

از رابطهٔ (۷۰.۲) درمورد بسط سریها نتیجه می‌شود که:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\rho^{n-1} = \frac{1}{(1-\rho)^2}$$

پس






**شکل ۴.۶** رابطهٔ بین $L$ و $\rho$ درمدل $M/M/1$

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} \qquad (۱۹.۶)$$

رابطهٔ بین $L$ و $\rho$ درشکل ۴.۶ نشان داده‌شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، $\rho$ باید کوچکتر از یك باشد. درغیر این‌صورت طول صف بینهایت و سیستم ناپایدار خواهد شد.

میانگین طول صف یا $L_q$ را نیز می‌توان حساب کرد. درهر لحظه چنانچه سیستم دارای $n$ مشتری باشد، طول صف برابر با $(n-1)$ خواهد بود. لذا،

$$L_q = \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\pi_n = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi_n - \sum_{n=1}^{\infty}\pi_n$$

جملهٔ اول برابر $L$ و جملهٔ دوم برابر با $(1-\pi_0)$ است. پس،

$$L_q = L - (1-\pi_0) = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} \qquad (۲۰.۶)$$

**محاسبهٔ مدت زمان انتظار درسیستم**

فرض کنید $T_s$ معرف مدت‌زمان انتظار درسیستم و $T_q$ مدت‌زمان انتظار درصف باشد. می‌دانیم که، طبق تعریف

$$W_q = E(T_q) \;,\; W = E(T_s)$$

$W$ و $W_q$ را می‌توان با استفاده از رابطهٔ «لیتل» به‌دست آورد که

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu-\lambda} \qquad (۲۱.۶)$$

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} \qquad (۲۲.۶)$$

**مثال ۳.۶** مثال ۱.۶ را مجدداً درنظر بگیرید. به‌طور متوسط یك مشتری چه‌مدت منتظرمی‌ماند تا کتابدار به‌تقاضای او رسیدگی کند؟ چند نفر به‌طور متوسط منتظر هستند تا کتابدار به‌تقاضای آنها رسیدگی کند؟ از لحظهٔ ورود یك مشتری تا لحظه‌ای که کار او تمام شود، به‌طور متوسط چه‌مدت طول می‌کشد؟

حل: سه سؤال موردنظر به‌ترتیب مبین مقادیر $W_q$ و $L_q$ و $W$ است، که از رابطه‌های (۲۲.۶)، (۲۰.۶) و (۲۱.۶) به‌دست می‌آید.

$$W_q = \frac{10}{12(2)} = \frac{10}{24} \text{ ساعت} = 25 \text{ دقیقه}$$

$$L_q = \frac{100}{12(2)} = \frac{100}{24} = 4.17$$

$$W = \frac{1}{2} \text{ ساعت} = 30 \text{ دقیقه}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود $W = W_q + 1/\mu$ است.

## تابع توزیع مدت‌زمان انتظار مشتری درمدل $M/M/1$

چنانچه علاوه‌بر میانگین زمان انتظار مشتری در سیستم با صف، که از رابطه‌های (۲۱.۶) و (۲۲.۶) به‌دست می‌آیند، اطلاعات بیشتری موردنیاز باشد، باید توابع توزیع این متغیرهای تصادفی را با استفاده از قضیهٔ زیر تعیین کرد.

**قضیهٔ ۱.۶** چنانچه $T_s$ و $T_q$ به‌ترتیب معرف مدت‌زمان انتظار مشتری درسیستم وصف، دریك مدل $M/M/1$ باشند، خواهیم داشت

$$P(T_q = 0) = \pi_0 = 1 - \rho \qquad (۲۳.۶)$$

$$P(T_q > x) = \rho e^{-\mu(1-\rho)x} \qquad (۲۴.۶)$$

$$P(T_s > x) = e^{-\mu(1-\rho)x} \qquad (۲۵.۶)$$

اثبات. رابطهٔ (۲۳.۶) واضح است. نحوهٔ اثبات رابطه‌های (۲۴.۶) و (۲۵.۶) مشابه است و فقط به‌اثبات آخرین رابطه می‌پردازیم. فرض کنید که درلحظهٔ ورود یك مشتری مشخص، تعداد مشتریها در سیستم $N$ باشد. در این‌صورت، با استفاده از روابط احتمال شرطی خواهیم داشت.

$$P(T_s > x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(T_s > x \mid N = n) P(N = n) \qquad (۲۶.۶)$$



ازطرف دیگر، مدت‌زمانی که‌این مشتری درصف منتظر می‌ماند، برابراست با:

$$T_q = X_1 + \dots + X_n$$

که $X_i$ معرف مدت‌زمان دریافت خدمت توسط مشتری $i$ ام است. به‌همین‌ترتیب

$$T_s = T_q + X_{n+1}$$

که $X_{n+1}$ نشاندهندهٔ مدت زمان دریافت خدمت توسط خود مشتری است. چون مجموع $n+1$ متغیر تصادفی مستقل نمایی با پارامتر $\mu$ است، یك متغیرتصادفی ارلانگی با پارامترهای $n+1$ و $\mu$ خواهد شد، بنابراین

$$P(T_s > x \mid N = n) = P\left(\sum_{i=1}^{n+1} X_i > x\right) = \int_x^{\infty} \mu e^{-\mu y} \frac{(\mu y)^n}{n!} dy \qquad (۲۷.۶)$$

با استفاده از رابطه‌های (۱۸.۶) و (۲۷.۶) رابطهٔ (۲۶.۶) را محاسبه می‌کنیم.

$$P(T_s > x) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n (1-\rho) \int_x^{\infty} \mu e^{-\mu y} \frac{(\mu y)^n}{n!} dy$$

$$= \mu(1-\rho) \int_x^{\infty} e^{-\mu y} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n (\mu y)^n}{n!} dy \qquad (۲۸.۶)$$

ازطرف دیگر با بهره‌گیری ازبسط سریهای نمایی نتیجه می‌شود

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n (\mu y)^n}{n!} = e^{\rho \mu y} = e^{\lambda y} \qquad (۲۹.۶)$$

پس از جایگزینی رابطهٔ فوق و محاسبهٔ انتگرال، رابطهٔ (۲۵.۶) اثبات می‌شود. مشاهده می‌شود که $T_s$ دارای توزیع نمایی با پارامتر $(\mu - \lambda)$ است. میانگین این متغیر تصادفی نمایی برابراست با

$$W = E(T_s) = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

که قبلا با استفاده از استنتاج لیتل به‌دست آمد.

**مثال ۳.۶** درمثال ۲.۶، احتمال اینکه مشتری اصلا منتظر نماند، چقدراست؟ احتمال اینکه حداقل یك ساعت منتظر بماند، چقدراست؟

$$P(T_q=0)=\pi_0=1-\rho=\frac{1}{6}$$

$$P(T_q>1)=\frac{5}{6}e^{-12(\frac{1}{6})}=\frac{5}{6}e^{-2}=0.11$$

**محاسبهٔ احتمال طول مطلوب صف درمدل $M/M/1$**

دربسیاری از سیستمها این موضوع اهمیت دارد که طول صف ازحد معینی مثلا $n$ تجاوز نکند. درصدی از اوقات که طول صف بیش از حد مطلوب باشد، از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.

$$P(\text{طول صف}>n)=P(\text{بودن } n+1 \text{ مشتری در سیستم})=\sum_{i=n+2}^{\infty}\pi_i$$

$$=\sum_{i=n+2}^{\infty}\rho^i(1-\rho)=\rho^{n+2} \qquad (30.6)$$

همان طور که مشاهده می‌شود، این احتمال به‌طور تصاعدی کاهش می‌یابد.

**مثال ۴.۶** درمثال ۱.۶، احتمال اینکه تعداد اعضای کتابخانه که منتظرند تا نوبت آنها برسد بیش از ۵ نفر باشد، چقدراست؟

$$P(\text{طول صف}>5)=\rho^7=\left(\frac{5}{6}\right)^7$$

## ۴.۶ مدل $M/M/1/K$. سیستم باظرفیت متناهی

این مدل از همه‌نظر مثل مدل قبلی است، به‌استثنای اینکه درآن ظرفیت سیستم متناهی و برابر با $K$ است. به علت این محدودیت، چنانچه مجموعاً $K$ مشتری درسیستم بمانند، از ورود مشتریهای جدید جلوگیری‌می‌شود. درضمن‌فرض براین است که مشتریهایی که به‌علت نبودن جا وارد سیستم نمی‌شوند، مجدداً مراجعه نمی‌کنند.

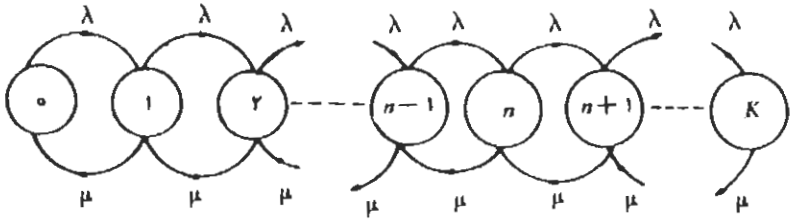
دراین سیستم داریم

$$\lambda_n=\begin{cases}\lambda\ , & n<K\\ 0\ , & n\geqslant K\end{cases} \qquad (31.6)$$

$$\mu_n=\mu \quad , n=1,2,\dots K \qquad (32.6)$$

نمودار آهنگ این مدل درشکل ۵.۶ نشان داده شده است.






**شکل ۵.۶** نمودار آهنگ مدل $M/M/1/K$

**محاسبهٔ آهنگ ورود مشتریان**

دراین مدل، آهنگ مراجعهٔ مشتریها را با $\lambda$ و آهنگ ورود آنها را با $\bar{\lambda}$ نشان می‌دهیم. این دو کمیت با یکدیگر متفاوت هستند؛ زیرا، تمام مشتریهایی که مراجعه می‌کنند لزوماً وارد سیستم نمی‌شوند. درصدی از مشتریها به‌علت تکمیل ظرفیت از ورود به‌سیستم بازمی‌مانند، که این درصد برابراست بادرصدی اززمان که سیستم دارای $K$ مشتری است. به‌این‌ترتیب، ازورود $\pi_k$ درصد مراجعین جلوگیری به‌عمل‌می‌آید وفقط $(1-\pi_k)$ درصد مراجعین وارد می‌شوند.

$$\bar{\lambda}=\lambda(1-\pi_k) \qquad (33.6)$$

**ضریب بهره‌وری $\rho$**

دراین مدل، ضریب بهره‌وری طبق تعریف برابر با $\rho=\frac{\lambda}{\mu}$ و طبق‌خاصیت این سیستم همواره کوچکتر از یك است. دراین مدل $\lambda/\mu$ می‌تواند مقداری بیش ازیك داشته باشد و درعین حال سیستم پایدار بماند، زیرا تعداد مشتریهای داخل سیستم هرگز به بینهایت نمی‌رسد وحداکثر تعداد آنها $K$ خواهد بود.

**محاسبهٔ احتمالات حدی**

طبق رابطهٔ (۱۲.۶)

$$C_n=\begin{cases}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n=r^n\ , & n\leqslant K\\ 0\ , & n>K\end{cases} \qquad (34.6)$$

(درعبارت فوق، $(\lambda/\mu)$ را با $r$ نشان می‌دهیم تا از $(\bar{\lambda}/\mu)=\rho$ متمایز گردد.)

از رابطهٔ (۱۲.۶) نتیجه می‌شود.

$$\pi_0=\left(1+\sum_{n=1}^{k}C_n\right)^{-1}=\frac{1-r}{1-r^{k+1}} \qquad (۳۵.۶)$$

به‌همین ترتیب، طبق رابطهٔ (۱۳.۶)،

$$\pi_n=\frac{(1-r)r^n}{1-r^{k+1}} \qquad (۳۶.۶)$$

درحالت خاصی که $r=1$ باشد

$$\pi_n=\frac{1}{k+1} \qquad (۳۷.۶)$$

### محاسبهٔ $L$ و $L_q$ و $W$ و $W_q$

$$L=\sum_{n=0}^{k}n\pi_n=\frac{(1-r)r}{1-r^{k+1}}\sum_{n=0}^{k}nr^{n-1}$$

از طرف دیگر

$$\sum_{n=0}^{k}nr^{n-1}=\sum_{n=0}^{k}\frac{d(r^n)}{dr}=\frac{d}{dr}\sum_{n=0}^{k}r^n=\frac{d}{dr}\left(\frac{1-r^{k+1}}{1-r}\right)=\frac{1-(k+1)r^{k+1}}{(1-r)^2}$$

پس

$$L=\frac{r}{1-r}-\frac{(k+1)r^{k+1}}{1-r^{k+1}} \qquad (۳۸.۶)$$

به‌همین ترتیب

$$L_q=L-(1-\pi_0)=L-\frac{r(1-r^k)}{1-r^{k+1}} \qquad (۳۹.۶)$$

برای محاسبهٔ $W$ و $W_q$، از روابط لیتل استفاده می‌کنیم. باید توجه‌داشت که دراین‌رابطه‌ها آهنگ ورود مشتری $\bar{\lambda}$ است (نه $\lambda$). بنابراین، با مشخص بودن $L$ و $L_q$ می‌توان $W$ و $W_q$ را نیز به‌دست‌آورد.

## ۵.۶ مدل $M/M/m$

این مدل $m$ خدمت‌دهنده دارد. ازنظر ظرفیت صف وجمعیت مشتری هم محدودیتی برای



آن فرض نمی‌شود. دراین مدل، به‌ازای تمام مقادیر $n$، آهنگ ورود مشتری ثابت و برابر با $\lambda$ است. آهنگ خدمت‌دهی هر خدمت دهنده $\mu$ فرض می‌شود. چنانچه تعداد مشتری داخل سیستم برابر با $n$ باشد، دوحالت پیش‌می‌آید. یکی اینکه $n<m$ باشد، که دراین صورت $n$ خدمت‌دهنده مشغول به‌کارند و آهنگ خروج مشتریها برابر با $n\mu$ است. دوم اینکه $n\geqslant m$ باشد، که دراین حالت حداکثر $m$ خدمت‌دهنده کار می‌کنند و آهنگ خروج برابر با $m\mu$ است. پس به‌طورخلاصه،

$$\mu_n=\begin{cases}n\mu, & n\leqslant m\\ m\mu, & m<n\end{cases} \qquad (۴۰.۶)$$

نمودار آهنگ این مدل درشکل ۶.۶ نشان داده شده است.

بنابراین

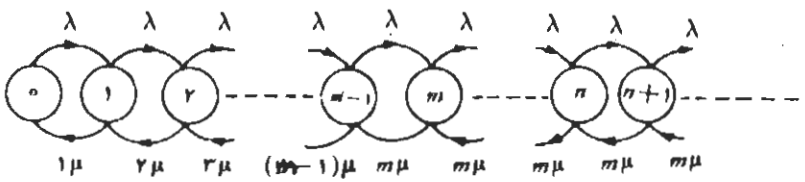
$$C_n=\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}=\begin{cases}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\frac{1}{n!}, & n<m\\ \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\frac{1}{m!}\frac{1}{m^{n-m}}, & n\geqslant m\end{cases} \qquad (۴۱.۶)$$

درنتیجه

$$\pi_0=\left[1+\sum_{n=1}^{m-1}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\frac{1}{n!}+\sum_{n=m}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\frac{1}{m!}\times\frac{1}{m^{n-m}}\right]^{-1}$$

پس ازساده‌شدن، رابطهٔ فوق به‌شکل زیرخلاصه می‌شود.

$$\pi_0=\left[\sum_{n=0}^{m-1}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\frac{1}{n!}+\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m}{m!}\frac{1}{(1-\rho)}\right]^{-1} \qquad (۴۲.۶)$$




شکل ۶.۶ نمودار آهنگ مدل $M/M/m$

که در آن $\rho = \lambda / m\mu$ است. فرض می‌شود که $\rho < 1$ باشد، درغیر این‌صورت، سیستم به حالت پایدار نمی‌رسد. برای محاسبهٔ $\pi_0$، از رابطهٔ (۱۳.۶) استفاده می‌کنیم.

$$\pi_n = \begin{cases} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{\pi_0}{n!} & , n \leqslant m \\ \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{\pi_0 m^{m-n}}{m!} & , n \geqslant m \end{cases} \qquad (۲۳.۶)$$

حالتهای خاص:

$$M/M/2 \quad \pi_0 = \frac{1-\rho}{1+\rho} \qquad (۲۴.۶)$$

$$M/M/3 \quad \pi_0 = \frac{1-\rho}{1+2\rho+1.5\rho^2} \qquad (۲۵.۶)$$

**محاسبهٔ $L_q$ و $W_q$ و $L$ و $W$ درمدل $M/M/m$**

$$L_q = \sum_{n=m}^{\infty}(n-m)\pi_n = \sum_{n=m}^{\infty}(n-m)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{\pi_0}{m!}(m)^{m-n}$$

$$= \frac{\pi_0}{m!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m \sum_{n=m}^{\infty}(n-m)(\rho)^{n-m}$$

یا

$$L_q = \frac{\pi_0}{m!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m \cdot \frac{\rho}{(1-\rho)^2} \qquad (۲۶.۶)$$

درحالت خاص $M/M/2$،

$$L_q = \frac{2\rho^3}{1-\rho^2} \qquad (۲۷.۶)$$

برای محاسبهٔ $W_q$، $W$ و $L$ از رابطهٔ لیتل استفاده می‌شود.

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$



$$L = \lambda W = \lambda\left(W_q + \frac{1}{\mu}\right) = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

$$L = \frac{\pi_0}{m!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m \frac{\rho}{(1-\rho)^2} + \frac{\lambda}{\mu}$$

**محاسبهٔ تابع توزیع مدت‌زمان انتظار درمدل $M/M/m$**

دراینجانیز $T_q$ را مدت‌زمان انتظارمشتری درصف و $T_s$ را مدت‌زمان انتظارمشتری درسیستم تعریف می‌کنیم. تابع توزیع $T_q$ براساس قضیهٔ زیر محاسبه می‌شود. تابع توزیع $T_s$ را نیز به‌روش مشابه می‌توان به‌دست آورد.

**قضیهٔ ۲.۶**

$$P[T_q = 0] = 1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m \frac{\pi_0}{(1-\rho)m!} \qquad (۲۸.۶)$$

$$P[T_q > t] = [1 - P(T_q = 0)]e^{-(m\mu - \lambda)t} \qquad (۲۹.۶)$$

اثبات. ابتدا $P(T_q = 0)$ را به‌دست می‌آوریم. $T_q = 0$ به‌معنای این است که‌در موقع ورود مشتری موردنظر، نه‌تنها صفی تشکیل نشده، بلکه حداقل یکی ازخدمت‌دهندگان نیز بیکار است. به‌عبارت دیگر حداکثر $m-1$ مشتری درسیستم هستند. بنابراین،

$$P(T_q = 0) = \sum_{n=0}^{m-1}\pi_n = \pi_0 \sum_{n=0}^{m-1}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!} \qquad (۵۰.۶)$$

با استفاده از رابطهٔ (۲۲.۶) خواهیم داشت.

$$\sum_{n=0}^{m-1}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!} = \frac{1}{\pi_0} - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m \frac{1}{m!} \cdot \frac{1}{1-\rho}$$

پس ازجایگزینی عبارت فوق دررابطهٔ (۵۰.۶)، رابطهٔ (۲۸.۶) ثابت می‌شود.

برای اثبات رابطهٔ (۲۹.۶)، از رابطهٔ احتمال شرطی استفاده می‌کنیم. اگر جمعیت داخل‌سیستم را $N$ فرض کنیم، مشتری موردنظر درصورتی درصف منتظرمی‌ماندکه درزمان ورود اوحداقل $m$ مشتری درسیستم باشند. بنابراین،

$$P(T_q > t) = \sum_{n=m}^{\infty} P(T_q > t \mid N = n)\pi_n \qquad (۵۱.۶)$$

مدت‌زمان انتظاراین مشتری (به فرض اینکه $m$ مشتری دیگر درلحظهٔ ورود او درسیستم

باشند)، برابر با مدت‌زمانی است که‌طول می‌کشد تا $(n-m+1)$ مشتری از سیستم خارج شوند، یعنی،

$$T_q = X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-m+1}$$

که $X_i$ عبارت از زمان بین خروج مشتریهای شمارهٔ $(i-1)$ و $i$ است. $X_i$ ها متغیرهای تصادفی نمایی با پارامتر $m\mu$ هستند، زیرا تمام خدمت‌دهندگان مشغول‌اند و آهنگ خدمت‌دهی هر کدام برابر با $\mu$ است. بدین‌ترتیب، $T_q$ دارای تابع توزیع ارلانگی با پارامترهای $(m\mu)$ و $(n-m+1)$ است.

در نتیجه

$$P(T_q > t \mid N = n) = \int_t^\infty m\mu e^{-m\mu y} \frac{(m\mu y)^{n-m}}{(n-m)!}\, dy$$

پس از جایگزینی رابطهٔ فوق در (۵۱.۶) نتیجه می‌شود:

$$P(T_q > t) = \sum_{n=m}^{\infty} \pi_n \int_t^\infty m\mu e^{-m\mu y} \frac{(m\mu y)^{n-m}}{(n-m)!}\, dy \qquad (۵۲.۶)$$

پس از قرار دادن مقدار $\pi_n$ در رابطهٔ (۴۳.۶) و تغییر محل انتگرال و مجموع، رابطهٔ (۵۲.۶) به‌صورت زیر درمی‌آید.

$$P(T_q > t) = (m\mu)\frac{\pi_0}{m!} \int_t^\infty e^{-m\mu y} \sum_{n=m}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n (m^{n-m}) \frac{(m\mu y)^{n-m}}{(n-m)!}\, dy$$

$$= \frac{\mu \pi_0}{(m-1)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m \int_t^\infty e^{-m\mu y} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(\lambda y)^{n-m}}{(n-m)!}\, dy$$

اما می‌دانیم که

$$\sum_{n=m}^{\infty} \frac{(\lambda y)^{n-m}}{(n-m)!} = e^{\lambda y}$$

و قضیه ثابت می‌شود.

**مثال ۵.۶** به‌یك تعمیرگاه بخچال، به‌طور متوسط هر دوساعت یك‌بار یك مشتری مراجعه می‌کند. ورود مشتریها طبق فرایند پواسون ومدت‌زمان تعمیر بخچال نیزنمایی فرض می‌شود. فقط یك تعمیرکار وجود دارد

الف. اگر به طور متوسط هربخچال به‌مدت ۴ ساعت در تعمیرگاه بماند، تعیین کنید که میانگین تعداد بخچالهایی که هنوز تعمیرشان شروع نشده، چقدر است؟

ب. اگر بخواهیم مدت زمان ۴ ساعت فوق به ۲٫۵ ساعت کاهش یابد، حداقل



به‌چند تعمیرکار نیاز داریم؟

حل: مدل صف دراین سیستم $M/M/1$ است. چون ورود مشتریها طبق توزیع پواسون است، لذا زمان بین دو ورود متغیر تصادفی نمایی با میانگین دوساعت یعنی $1/\lambda = 2$ و یا $\lambda = 0.5$ مشتری درهرساعت است. هر بخچال به‌طورمتوسط ۴ ساعت در تعمیرگاه می‌ماند. یعنی، $W = 4$. ازطرف دیگر

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{\mu - 0.5}$$

درنتیجه $\mu = 0.75$. به‌عبارت دیگر تعمیرکارمی‌تواند درهرساعت به‌طور متوسط به‌اندازهٔ ۰٫۷۵ بخچال را تعمیر کند. اگر بخواهیم میانگین تعداد بخچالهای تعمیر نشده را تعیین کنیم، باید $L_q$ را محاسبه کنیم. اما می‌دانیم که

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{(0.5)^2}{(0.75)(0.75 - 0.5)} = \frac{4}{3}$$

اگر بخواهیم مدت‌زمان انتظار کاهش یابد، یعنی $W \leqslant 2.5$ شود، باید تعداد خدمت‌دهنده‌ها را افزایش بدهیم.

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{L_q}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = \frac{L_q}{0.5} + \frac{1}{0.75} \leqslant 2.5$$

یا

$$L_q \leqslant \frac{7}{12}$$

از طرف دیگر، طبق رابطهٔ (۴۶.۶)،

$$L_q = \frac{\pi_0}{m!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

که

$$\rho = \frac{0.5}{m(0.75)} = \frac{2}{3m}$$

و $\pi_0$ ازرابطهٔ (۴۲.۶) به‌دست می‌آید.

ابتدا $m = 2$ را انتخاب می‌کنیم.

$$\pi_0 = \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{9}\right)^{-1} = 0.5$$

و

$$L_q = \frac{0.5}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2 \frac{\frac{1}{3}}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{12}$$

درنتیجه کلا دو تعمیر کار کافی است.

## ۶.۶ مدل $M/M/m/K$

دراین مدل فرض می‌شود که $m \leqslant K$ باشد. درنتیجه،

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & , n < K-1 \\ 0 & , n \geqslant K \end{cases} \qquad (۵۳.۶)$$

و

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & , \quad n \leqslant m \\ m\mu & , \quad m \leqslant n \leqslant K \\ 0 & , \quad K < n \end{cases} \qquad (۵۴.۶)$$

بنابراین، طبق رابطهٔ (۱۲.۶) خواهیم داشت.

$$C_n = \begin{cases} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!} & , \quad n < m \\ \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{m!} \frac{1}{m^{n-m}} & , \quad m \leqslant n \leqslant K \\ 0 & , \quad K < n \end{cases} \qquad (۵۵.۶)$$

همان‌طور که قبلا درمدل $M/M/1/K$ گفتیم، آهنگ ورود مشتریان لزوماً $\lambda$ نیست، زیرا تعدادی ازمشتریهایی که مراجعه می‌کنند به‌دلیل تکمیل ظرفیت، وارد سیستم نمی‌شوند. اگر آهنگ ورود مشتری را $\bar{\lambda}$ بنامیم، دراینجا نیز $\bar{\lambda} = \lambda(1-\pi_K)$ است. دراین مدل، $\rho = \bar{\lambda}/m\mu$ همواره کوچکتر ازیك است. ضمناً مقدار $\lambda/m\mu$، که می‌تواند بزرگتر ازیك باشد، را با $r$ نشان می‌دهیم.

بااستفاده ازرابطهٔ (۱۲.۶) نتیجه می‌شود.



$$\pi_0 = \left[\sum_{n=0}^{m-1}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m \frac{1}{m!}\sum_{n=m}^{K} r^{n-m}\right]^{-1} \qquad (۵۶.۶)$$

درحالت خاصی که $r = 1$ باشد، رابطهٔ فوق به‌صورت زیردرمی‌آید:

$$\pi_0 = \left[\sum_{n=0}^{m-1}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m \frac{1}{m!}(K-m+1)\right]^{-1} \qquad (۵۷.۶)$$

برای محاسبهٔ $L_q$ ازرابطه (۲۰.۵) استفاده می‌شود که درنتیجه:

$$L_q = \frac{\pi_0}{m!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m \cdot \frac{r}{(1-r)^2}\left[1 - r^{K-m+1} - (1-r)(K-m+1)r^{K-m}\right] \qquad (۵۸.۶)$$

و به‌همین ترتیب،

$$L = L_q + m - \pi_0 \sum_{n=0}^{m-1}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{m-n}{n!} \qquad (۵۹.۶)$$

$W$ و $W_q$ نیز از روابط لیتل حاصل می‌شوند.

### مدل ارلانگی $(M/M/m/m)$

حال، حالت خاصی را درنظر بگیرید که $K = m$ باشد. درچنین مدلی فرض می‌کنیم که سیستم گنجایش هیچ صفی را ندارد وظرفیت سیستم منحصر به‌تعداد مشتریهایی است که می‌توانند خدمت دریافت کنند. (تعداد خدمت‌دهندگان). مثلا، دریك شبکهٔ تلفن، اگر $m$ کانال ارتباطی باشد، درهرلحظه به‌همین تعداد هم مشتریها می‌توانند تلفن بزنند. چنانچه دریك لحظه که تمام خطوط تلفن اشغال است، یك متقاضی جدید تلفن بزند، نه‌تنها قادر به‌مکالمه نیست، بلکه حتی نوبت اوهم محفوظ نخواهد بود. درچنین حالت خاصی،

$$\pi_0 = \left(\sum_{n=0}^{m}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!}\right)^{-1} \qquad (۶۰.۶)$$

$$\pi_m = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m \frac{1}{m!}\left[\sum_{n=0}^{m}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot \frac{1}{n!}\right]^{-1} \qquad (۶۱.۶)$$

رابطهٔ (۶۱.۶) به **رابطهٔ ارلانگی** موسوم است. دراین رابطه $\pi_m$ معرف درصدی از زمان است که تمام خطوط تلفن اشغال هستند ومکالمهٔ جدید امکانپذیر نیست. $\pi_m$ می‌تواند یکی ازمعیارهای اصلی ارزیابی سیستم تلفن باشد.

## ۷.۶ مدل $M/M/\infty$

دراین مدل فرض بر این است که از نظر تعداد خدمت‌دهندگان محدودیتی وجود ندارد. می‌توان چنین تصور کرد که درچنین سیستمی هر لحظه‌که یك مشتری جدید وارد شود، یك خدمت‌دهنده نیز آمادهٔ ارائهٔ خدمت می‌شود. دراین مدل به‌ازای تمام مقادیر $n$، $\lambda_n = \lambda$ است. برای تعیین $\mu_n$، باید درنظر داشت که اگرچه سیستم می‌تواند بینهایت خدمت‌دهنده داشته باشد، اما اگر $n$ مشتری درسیستم باشند، فقط $n$ خدمت‌دهنده نیز مشغول به‌کارهستند و درنتیجه

$$\mu_n = n\mu$$

بنابراین

$$C_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!}$$

به‌این‌ترتیب،

$$\pi_0 = \frac{1}{1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!}} = e^{-\lambda/\mu} \qquad (۶۲.۶)$$

و

$$\pi_n = C_n\pi_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!} \cdot e^{-\lambda/\mu} \qquad (۶۳.۶)$$

میانگین تعداد مشتریهای داخل سیستم $(L)$ را نیزمی‌توان محاسبه کرد.

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n\pi_n = \sum_{n=0}^{\infty} n\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n e^{-\lambda/\mu}\frac{1}{n!} = \frac{\lambda}{\mu}e^{-\lambda/\mu}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}$$

یا

$$L = \frac{\lambda}{\mu} \qquad (۶۴.۶)$$

همان طور که مشاهده می‌شود، میانگین تعداد مشتریهای داخل سیستم در درازمدت متناسب با آهنگ ورود مشتری است و نسبت معکوس با آهنگ خدمت دهی دارد.

## ۸.۶ مدل $M/M/m/C$. مدل نمایی با جمعیت متناهی

دراین مدل فرض می‌کنیم تعداد مشتریهای بالقوهٔ سیستم متناهی است. به‌عبارت دیگر،



حداکثر تعداد مشتریهایی که به‌سیستم مراجعه می‌کنند، برابر با عددی متناهی، مثلاً $C$ است. یکی ازکاربردهای این مدل، برنامه‌ریزی تعمیر ونگهداری است. اگر تعداد تعمیرکاران یك کارخانه را $m$ وتعداد ماشینهای آن کارخانه‌که ممکن است خراب شوند را $C$ فرض کنیم، بایك سیستم صف سروکار داریم،که می‌توان در آن ماشینها را مشتری وتعمیرکاران را خدمت‌دهنده تصورکرد. بدیهی است که دراین مورد جمعیت مشتریان متناهی و برابر با $C$ است. این سیستم را درصورتی می‌توان یك مدل نمایی باجمعیت متناهی نامید،که هم مدت‌زمان تعمیر یك ماشین و هم مدت‌زمانی که طول می‌کشد تا یك ماشین خراب شود را نمایی فرض کنیم. درهر لحظه ماشینهارا می‌توان به‌دو گروه‌تقسیم‌کرد. گروه اول، ماشینهایی که خراب‌شده‌اند یا تحت تعمیر یا منتظر تعمیر هستند. گروه دوم ماشینهایی که سالم هستند. ولی هرلحظه ممکن است‌خراب شوند.

مدت‌زمان سالم‌بودن هرماشین، قبل ازخراب‌شدن آن را متغیرتصادفی باتوزیع‌نمایی وپارامتر $\lambda$ فرض می‌کنیم. اگر تعداد ماشینهای خراب برابر با $n$ باشد، مجموعاً $(C-n)$ ماشین، سالم هستند،که مشتریهای بعدی سیستم محسوب می‌شوند. دراین حالت، زمان ورود اولین مشتری، درواقع زمانی است‌که اولین ماشین سالم خراب می‌شود. بنابراین، مدت‌زمانی‌که طول می‌کشد تا اولین ماشین خراب شود، یك متغیرتصادفی، وبرابر با حداقل $(C-n)$ متغیر تصادفی نمایی است. همان طورکه می‌دانیم، چنین متغیر تصادفی دارای توزیع نمایی با پارامتر $(C-n)\lambda$ است. بنابراین به‌ازای تمام مقادیر $n<C$ خواهیم داشت:

$$\lambda_n = (C-n)\lambda \qquad (۶۵.۶)$$

و

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & , \ n \leqslant m \\ m\mu & , \ m < n \leqslant C \\ 0 & , \ C < n \end{cases} \qquad (۶۶.۶)$$

و

$$C_n = \begin{cases} \dfrac{C!}{(C-n)!n!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n & , \ n \leqslant m \\ \dfrac{C!}{(C-n)!m!m^{n-m}}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n & , \ m \leqslant n \leqslant C \\ 0 & , \ C < n \end{cases}$$

یا

$$C_n=\begin{cases}\binom{C}{n}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n & n\leqslant m\\ \binom{C}{n}\frac{n!}{m!}\cdot m^{m-n}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n, & m\leqslant n\leqslant C\end{cases}\qquad(۶۷.۶)$$

و با استفاده از رابطهٔ $\pi_0=\left[1+\sum_{n=1}^{C}C_n\right]^{-1}$، می‌توان مقدار $\pi_0$ را محاسبه کرد.

$M/M/m//C$

**محاسبهٔ آهنگ ورود درمدل $M/M/n/0$**

طبق آنچه گفته‌شد، دراین مدل $\lambda$ معرف پارامتر متغیر تصادفی نمایی مربوط به عمرهیك ماشین است، که مستقل از دیگر ماشینها فرض شده است. به‌عبارت دیگر، $1/\lambda$ میانگین مدت‌زمانی است که طول می‌کشد تا یك مشتری مشخص وارد سیستم شود. بدین‌ترتیب، آهنگ ورود مشتری بستگی به‌تعداد مشتریهایی دارد که خارج ازسیستم هستند. اگر $\bar{\lambda}$ را آهنگ ورود مشتری بنامیم، با استفاده از رابطهٔ (۶۵.۶) خواهیم داشت.

$$\bar{\lambda}=\sum_{n=0}^{C}\lambda_n\cdot\pi_n=\sum_{n=0}^{C}(C-n)\lambda\pi_n=\lambda C\sum_{n=0}^{C}\pi_n-\lambda\sum_{n=0}^{C}n\pi_n$$

درنتیجه، با استفاده از این‌خاصیت که $\sum_{n=0}^{C}\pi_n=1$ و $L=\sum_{n=0}^{C}n\pi_n$، خواهیم داشت

$$\bar{\lambda}=\lambda(C-L)\qquad(۶۸.۶)$$

به‌این ترتیب، در رابطه‌های لیتل نیز باید از $\bar{\lambda}$ به‌عنوان آهنگ ورود مشتری استفاده کرد، یعنی

$$W=\frac{L}{\bar{\lambda}}=\frac{L}{\lambda(C-L)}\qquad(۶۹.۶)$$

و

$$W_q=\frac{L_q}{\bar{\lambda}}=\frac{L_q}{\lambda(C-L)}\qquad(۷۰.۶)$$

## ۹.۶ مدلهای نمایی با آهنگ ورود یا آهنگ خدمت‌دهی متغیر

در اکثر مدلهای قبلی، آهنگ ورود مشتری وهمچنین آهنگ خدمت‌دهی یك خدمت‌دهنده



را ثابت ومستقل ازتعداد مشتریهای داخل سیستم فرض کردیم. درعمل، ممکن است آهنگ ورود مشتری یا آهنگ خدمت‌دهی، بستگی به‌طول صف داشته‌باشد. مثلا، درمدل $M/M/m//C$، که قبلا مورد بررسی قرار گرفت، آهنگ ورود مشتری، $\lambda_n$، بستگی به $n$ یعنی تعداد مشتریهای داخل سیستم داشت.

نمونه‌های متعددی وجود دارد که آهنگ ورود مشتری و یا آهنگ خدمت متأثر از طول صف خواهدبود. مثلا، سیستمی را درنظربگیرید که در آن عمل «امتناع» وجوددارد؛ بدین معنا که بعضی ازمشتریها با مشاهدهٔ یك صف طولانی درسیستم، از ورود به‌آن امتناع می‌کنند. فرض‌کنید که $\lambda_0$ معرف آهنگ مراجعهٔ مشتریها باشد. آهنگ ورود به‌سیستم، لزوما $\lambda_0$ نیست و هرچه جمعیت مشتریهای داخل سیستم افزایش یابد، به‌تعدادکسانی که امتناع می‌کنند افزوده می‌شود.

اگر $\lambda_n$ معرف آهنگ ورود مشتری به‌سیستم درلحظه‌ای باشدکه تعداد مشتریهای داخل سیستم $n$ است، رابطهٔ زیر برقرار خواهد بود.

$$\lambda_n=b_n\lambda_0\qquad(۷۱.۶)$$

که $b_n$ پارامتری است بین صفر ویك که نسبت به $n$ کاهنده است، یعنی

$$0\leqslant\cdots\leqslant b_2\leqslant b_1\leqslant 1\qquad(۷۲.۶)$$

به‌این ترتیب، درصورتی که $n$ مشتری درسیستم باشند، فقط درصدی ازمراجعین، یعنی $b_n$، وارد می‌شوند. با توجه به‌شرایط سیستم، $b_n$ می‌تواند به‌شکل $(n+1)^{-1}$، $(n^2+1)^{-1}$، $(n+1)^{-\alpha}$، که درآن $\alpha$ عددی مثبت است، یا $e^{-\alpha n}$ (با $\alpha$ مثبت) ونظایر اینها باشد.

مدل دیگری را نیز می‌توان نام بردکه آهنگ ورود مشتریان به‌آن بستگی به طول صف دارد وآن حالتی است که بعضی ازمشتریها انصراف خود را از ایستادن درصف اعلام می‌دارند. درچنین سیستمهایی، اگرچه مشتریهایی که مراجعه می‌کنند، وارد سیستم هم می‌شوند، وبه صف‌ملحق می‌کردند، بعضی‌از آنها منصرف‌می‌شوند وسیستم را ترك می‌کنند. مدت‌زمانی راکه یك مشتری درصف می‌ماند، قبل ازاینکه سیستم را ترك‌کند می‌توان متغیری تصادفی فرض کرد، که دارای توزیع‌نمایی با پارامتر $\gamma$ است. چون انصراف مشتریها را مستقل ازیکدیگر فرض می‌کنیم، مدت‌زمانی که طول می‌کشد تا اولین مشتری از ادامهٔ توقف درصف منصرف شود، متغیری تصادفی و برابر با حداقل $n$ متغیر تصادفی نمایی است. بنابراین، طبق خاصیت توزیع‌نمایی، مدت زمانی که طول می‌کشد تا اولین مشتری منصرف شود، متغیرتصادفی نمایی با پارامتر $n\gamma$ است.

برای محاسبهٔ $\mu_n$ درسیستمهای با انصراف، فرض‌کنیدکه دریك لحظه $n$ مشتری در سیستم باشند، تغییر حالت سیستم از $n$ به $n-1$ به دو علت صورت می‌گیرد، یا ارائهٔ خدمت به‌یك مشتری تمام می‌شود ویا یکی ازمشتریها از ادامهٔ توقف درصف منصرف می‌گردد. بنابراین، مثلا درمدل $M/M/1$، آهنگ تغییر حالت از $n$ به $n-1$ برابر با

$(n-1)\mu$

$\mu+n\gamma$ است.

دربعضی ازسیستمها، آهنگ خدمت‌دهی نیزمی‌تواند با افزایش طول صف، افزایش یابد. مثلا، دریك‌سیستم ممکن‌است‌چندنوع آهنگ خدمت‌دهی وجود داشته‌باشد. درصورتی که تعداد مشتریهای داخل سیستم از حدی معین کمتر باشد، آهنگ خدمت‌دهی $\mu$ فرض می‌شود. با افزایش جمعیت سیستم، خدمت‌دهنده با استفاده ازابزار بهتر آهنگ خدمت‌دهی را مثلا به $\mu'$ افزایش می‌دهد. به‌همین ترتیب، باافزایش بیشترجمعیت، آهنگ خدمت‌دهی نیزمجدداً بیشتر می‌شود. دربعضی ازسیستمها تغییر آهنگ خدمت را به‌صورت زیرمی‌توان نشان داد:

$$\mu_n = \alpha_n \mu_1 \qquad (۷۳.۶)$$

که $\mu_1$ و $\mu_n$ به‌ترتیب آهنگ خدمت به فرض وجود ۱ و $n$ مشتری درسیستم است و $\alpha_n$ عددی بزرگتر ازیك فرض می‌شود. در مواردی $\alpha_n$ را می‌توان $n^*$ فرض کردکه $n$ عددی مثبت است.

درتمام مدلهای فوق، تعداد خدمت‌دهندگان نیزمؤثراست. مثلا، درمدل $M/M/m$، که امتناع مشتریها نیز در آن امکانپذیر است، پارامتر $b_n$ دررابطهٔ (۷۱.۶) خیلی بیشتر از مدل $M/M/1$ است، زیرا مشتری، خارج‌قسمت تعداد مشتریهای داخل سیستم برتعداد خدمت‌دهندگان را مدنظر قرارمی‌دهد.

## ۱۰.۶ دورهٔ مشغول بودن وبیکاری سیستم در مدل $M/M/1$

همان‌طورکه‌درفصل پنجم گفتیم، هرسیستم‌صف به‌تناوب دوره‌های بیکاری وکار را طی‌می‌کند. براساس قرارداد، $p_0$ معرف درصدی از اوقات است که، در درازمدت، سیستم کارمی‌کند ومقدار این کمیت ازرابطهٔ (۲۴.۵) به‌دست می‌آید.

درمورد مدل $M/M/1$، درصد بیکاری سیستم $\pi_0$ و درصد مشغول بودن سیستم $\rho = 1-\pi_0$ است. مدت زمان بیکاری، فاصلهٔ بین زمان خالی‌شدن سیستم تا زمان ورود مشتری بعدی است. با توجه به‌خاصیت بدون حافظه‌بودن توزیع‌نمایی، مدت‌زمان بیکاری متغیری است تصادفی با توزیع‌نمایی و پارامتر $\lambda$، و میانگین آن عبارت‌است از:

$$E(I) = \frac{1}{\lambda} \qquad (۷۴.۶)$$

با استفاده از رابطه‌های (۲۴.۵) و (۷۴.۶) وهمچنین $p_0 = 1-\pi_0$ نتیجه می‌شودکه

$$E(B) = \frac{1-\pi_0}{\pi_0} \cdot \frac{1}{\lambda}$$

با استفاده ازرابطهٔ (۱۷.۶)،



$$E(B) = \frac{1}{\mu-\lambda} \qquad (۷۵.۶)$$

اگر $N(B)$ معرف تعداد مشتریانی باشدکه دریك دورهٔ مشغول بودن سیستم خدمت دریافت می‌کنند،

$$E(B) = E[N(B)] \cdot \frac{1}{\mu}$$

یا

$$E[N(B)] = \frac{\mu}{\mu-\lambda} = \frac{1}{1-\rho} \qquad (۷۶.۶)$$

## ۱۱.۶ دورهٔ گذرا درمدلهای نمایی

دراین قسمت تنها به‌چارچوب روابط مربوط به دورهٔ‌گذرا می‌پردازیم. قضیهٔ زیر چنین چارچوبی را ارائه می‌کند. یکی از مباحثی که درمورد دورهٔ گذرا مطرح می‌شود، چگونگی حل معادلات دیفرانسیل حاصل از قضیهٔ زیراست، که خارج ازبحث این کتاب است.

**قضیه.** در هرفرایند تولد و مرگ، احتمال وجود $n$ مشتری درسیستم، درلحظهٔ $t$، از دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t) \qquad (۷۷.۶)$$

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = -(\lambda_n+\mu_n)p_n(t) + \lambda_{n-1}p_{n-1}(t) + \mu_{n+1}p_{n+1}(t)\,,\ n \geqslant 1 \qquad (۷۸.۶)$$

**اثبات.** برحسب تعریف

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_0(t+\Delta t) - p_0(t)}{\Delta t}$$

ازطرف دیگر

$$p_0(t+\Delta t) = P[N(t+\Delta t) = 0] = \sum_{i=0}^{\infty} P[N(t+\Delta t) = 0 \mid N(t) = i]P[N(t) = i]$$

اما طبق فرضهای ۱ و ۲ فرایند تولد و مرگ داریم:

$$P[N(t+\Delta t)=0 \mid N(t)=1]$$
$$= P[(t, t+\Delta t) \text{ یک مرگ در فاصلهٔ} \mid N(t)=i] = \mu_1 \Delta t + o(\Delta t)$$
$$P[N(t+\Delta t)=0 \mid N(t)=0]$$
$$= P[\Delta t \text{ هیچ تولد در فاصلهٔ} \mid N(t)=0] = 1-\lambda_0 \Delta t + o(\Delta t)$$

و به‌ازای $i \geqslant 2$

$$P[N(t+\Delta t)=0 \mid N(t)=i] = P[\Delta t \text{ تعداد } i \text{ مرگ در فاصلهٔ} \mid N(t)=i] = o(\Delta t)$$

یا

$$P_0(t+\Delta t)=[1-\lambda_0 \Delta t + o(\Delta t)]P_0(t)+[\mu_1 \Delta t + o(\Delta t)]P_1(t)+o(\Delta t)$$

درنتیجه، این رابطه را می‌توان به‌صورت زیر نوشت که در حد، همان اولین معادلهٔ دیفرانسیل موردنظر است.

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_0(t+\Delta t)-p_0(t)}{\Delta t} = -\lambda_0 p_0(t)+\mu p_1(t)$$

از طرف دیگر، به‌ازای $n \geqslant 1$

$$P_n(t+\Delta t)=\sum_{i=0}^{\infty} P[N(t+\Delta t)=n \mid N(t)=i]P[N(t)=i]$$
$$= P[N(t+\Delta t)=n \mid N(t)=n-1]p_{n-1}(t)+P[N(t+\Delta t)$$
$$=n \mid N(t)=n]+P[N(t+\Delta t)=n \mid N(t)=n+1]p_{n+1}(t)$$
$$+\sum_{\substack{i=0 \\ i\neq n-1, i\neq n+1}}^{\infty} P[N(t+\Delta t)=i \mid N(t)=i]p_n(t)$$

مجدداً طبق فرضهای ۱ و ۲ فرایند تولد و مرگ داریم:

$$P[N(t+\Delta t)=n \mid N(t)=n-1]=\lambda_{n-1}\Delta t+o(\Delta t)$$
$$P[N(t+\Delta t)=n \mid N(t)=n]=1-(\lambda_n+\mu_n)\Delta t+o(\Delta t)$$
$$P[N(t+\Delta t)=n \mid N(t)=n+1]=\mu_{n+1}\Delta t+o(\Delta t)$$

درنتیجه می‌توان رابطهٔ فوق را به‌صورت زیر نوشت و حد آن را به‌دست آورد، که همان



دستگاه معادلات مربوط به‌صورت مسئله است.

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_n(t+\Delta t)-p_n(t)}{t}$$
$$= -(\lambda_n+\mu_n)p_n(t)+\lambda_{n-1}p_{n-1}(t)+\mu_{n+1}p_{n+1}(t)$$

**حالت خاص: فرایند تولد خالص**

اگر فرض کنیم، به‌ازای $n=1, 2, 3, \ldots$، $\mu_n=0$ است، یعنی فقط تولد اتفاق می‌افتد، دستگاه معادلات دیفرانسیل به‌صورت زیر درمی‌آید. به‌ازای تمام مقادیر $n$، $\lambda_n=\lambda$ فرض می‌شود.

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t)$$
$$\frac{dp_n(t)}{dt} = -\lambda p_n(t)+\lambda p_{n-1}(t)$$

حل این معادلات به جواب زیر منجر می‌شود.

$$p_n(t)=P[N(t)=n]=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n-1}$$

که معرف یک فرایند پواسون است، که البته این نتیجه از قبل هم قابل پیش‌بینی بود.

**محاسبهٔ رابطه‌های صف در دورهٔ پایداری با استفاده از رابطه‌های دورهٔ گذرا**

اگر سیستم به‌دورهٔ پایدار برسد، رابطهٔ $\pi_n=\lim_{t\to\infty} p_n(t)$، به‌ازای تمام مقادیر $n$ وجود خواهد داشت و مقدار $\pi_n$ نیز مستقل از شرایط شروع کار سیستم، ثابت خواهد بود. درنتیجه،

$$\lim_{t\to\infty}\frac{dp_0(t)}{dt}=\frac{d\pi_0}{dt}=0$$
$$\lim_{t\to\infty}\frac{dp_n(t)}{dt}=\frac{d\pi_n}{dt}=0$$

به‌این ترتیب معادلات دیفرانسیل قضیهٔ فوق در حد به‌صورت زیر درمی‌آید.

$$\lambda\pi_0=\mu\pi_1$$

$$(\lambda_n+\mu_n)\pi_n=\lambda_{n-1}\pi_{n-1}+\mu_{n+1}\pi_{n+1}$$

این رابطه‌ها، همان روابط (۶.۶) و (۸.۶) است، که قبلا با استفاده از معادلهٔ تعادلی به‌دست آمده بودند و رابطهٔ (۱۱.۶) نیز از آنها نتیجه‌گیری شده بود.

## مسائل

۱. در تعمیرگاهی که دارای یك تعمیرکار است، ماشینها طبق فرایند پواسون برای تعمیر (به‌طور متوسط هر روز ۲ ماشین) به‌تعمیرگاه وارد می‌شوند. مدت‌زمان تعمیر نمایی با میانگین ۱/۳ روز فرض می‌شود.

الف. به‌طور متوسط هرماشین چه‌مدت در تعمیرگاه است؟

ب. احتمال اینکه دریك لحظه بیش از ۵ ماشین در تعمیرگاه باشد، چیست؟

۲. زمان بین دوورود متوالی مراجعین یك تلفن عمومی، نمایی با میانگین ۱۰ دقیقه، و مدت زمان هرتلفن نیز نمایی با میانگین ۳ دقیقه است.

الف. احتمال اینکه کسی برای تلفن‌زدن مراجعه کند ومجبور شود که صبر کند، چقدر است؟

ب. به‌طورمتوسط، درهرلحظه، چند نفر منتظرهستند که تلفن بزنند؟

ج. احتمال اینکه مدت زمان تلفن یکسی ازمراجعین بیش از ۱۲ دقیقه طول بکشد، چقدر است؟

د. احتمال اینکه مدت‌زمان انتظار یکسی ازمراجعین درصف بیش از ۱۲ دقیقه طول بکشد، چقدر است؟

ه. چه‌درچه درصدی اززمان، این تلفن مشغول نیست؟

و. به‌دلایلی تعداد مراجعین اضافه شده است، به‌طوری که میانگین انتظار هر مشتری در صف به ۳۰ دقیقه رسیده است. به‌طورمتوسط، هرچند دقیقه‌ای یك نفر برای تلفن‌زدن مراجعه می‌کند؟

۳. دریك کارگاه، کارهای سفارشی براساس فرایند پواسون با میانگین ۲۵ قطعه درساعت می‌رسد. مدت‌زمان لازم برای ساخت هرقطعه، براساس توزیع نمایی است و به‌طورمتوسط درهرساعت ۳۰ قطعه ساخته می‌شود.

الف. احتمال اینکه دریك لحظه کارگاه فاقد کارسفارشی باشد، چقدراست؟

ب. میانگین تعداد کارهای سفارشی که منتظرهستند، چند عدد است؟

ج. احتمال اینکه یك‌کار بیش از ۲۰ دقیقه درصف نماند، چقدر است؟

د. احتمال اینکه دریك لحظه ۸ تا ۱۰ کار درصف منتظربمانند، چقدراست؟

ه. اگر تعداد کارهای سفارشی ۲۰ درصد افزایش یابد، میانگین تعداد کارهای انجام نشده چه تغییری می‌کند؟

و. اگرسرعت کار ۲۰ درصد افزایش یابد، میانگین تعدادکارهای انجام‌نشده چه‌تغییری



می‌کند؟

۴. مسئلهٔ شمارهٔ ۵ فصل سوم را درنظربگیرید. فرض می‌کنیم که دراین چاپخانه سه‌ماشین فتوکپی مشابه وجود داشته باشد. با هر ماشین می‌توان به‌طور متوسط ۱۸ جزوهٔ نوع الف یا ۶ جزوهٔ نوع ب را درساعت تکثیر کرد. سیاست چاپخانه این است که جزوه‌های نوع الف با ماشین شمارهٔ ۱ و جزوه‌های نوع ب با ماشینهای شمارهٔ ۲ و ۳ تکثیرشوند.

الف. جزوه‌های نوع الف و ب به‌طور متوسط چه‌مدت درچاپخانه می‌مانند؟

ب. احتمال اینکه تکثیر جزوهٔ نوع الف یا ب بلافاصله پس ازرسیدن به‌چاپخانه انجام شود، چقدراست؟

ج. فرض کنید چنانچه تعداد جزوه‌های نوع الف در چاپخانه به سه عدد برسد. شخصی برای کمك کردن به‌مسئول ماشین‌فرستاده می‌شود، که‌دراین صورت می‌توان هرساعت به‌جای ۱۸ جزوه ۲۰ جزوه را به‌طور متوسط تکثیر کرد. نمودار آهنگ این مدل را رسم کنید و با استفاده از آن به سؤال بند الف مجدداً پاسخ‌دهید.

۵. دریك سیستم نمایی آهنگ ورود وخروج مشتریها به‌شرح زیراست.

$$\lambda_n=\begin{cases}\lambda & , \quad n\leqslant 2\\ 2\lambda & , \quad n>2\end{cases} \quad , \quad \mu_n=10 \quad , \quad n\geqslant 1$$

احتمال اینکه سیستم خالی باشد، چیست؟ تحت چه شرایطی سیستم به‌حالت پایدارمی‌رسد؟ این سیستم را چگونه تفسیرمی‌کنید؟

۶. درمدل $M/M/1$، احتمال اینکه مدت زمان انتظار یك مشتری درسیستم، بیش‌از مدت زمان میانگین انتظار مشتریها درسیستم باشد، چقدراست؟

۷. اتومبیلها طبق فرایند پواسون با میانگین ۱۵ اتومبیل درساعت وارد یك مغازهٔ تعویض روغن می‌شوند، که فقط یك نفر درآنجا کارمی‌کند. مدت زمان تعویض روغن، متغیری تصادفی با توزیع نمایی است. به‌طور متوسط می‌توان روغن ۷ اتومبیل را درساعت تعویض کرد. فضای موجود فقط اجازهٔ توقف سه اتومبیل را می‌دهد (که شامل اتومبیلی که درحال تعویض روغن است نیزمی‌شود).

الف. به‌طور متوسط درهرلحظه چند اتومبیل دراین مغازه وجود دارد؟

ب. چند درصد صاحبان اتومبیلها به‌علت محدودیت جا ازتعویض روغن دراین مغازه منصرف می‌شوند؟

۸. مسئلهٔ شمارهٔ ۱۲ فصل سوم را درنظربگیرید. مدت انجام هرسفارش تابعی نمایی با میانگین یك هفته است.

الف. احتمال اینکه پس ازمراجعه یك مشتری، ساخت مبل او بلافاصله شروع شود، چیست؟

احتمال اینکه‌یك مشتری بیش ازهشت‌هفته معطل شود تا مبل خود را دریافت کند، چیست؟

ب. فرض کنید مدیریت کارگاه تصمیم گرفته است درهر لحظه بیش از $K$ کارانجام نشده را قبول نکند. $K$ را طوری محاسبه کنید که اولا، درصد بیکاری به‌بیش ازیك سوم اوقات نرسد و ثانیا، به‌طور متوسط بیش از دوکار انجام نشده درکارگاه نباشد. بااین تصمیم، کارگاه در سال (۵۲ هفته) به‌طور متوسط چندکار قبول می‌کند؟ چند درصد مشتریهای خود را ازدست می‌دهد؟

۹. اتومبیلها بر اساس فرایند پواسون وارد یك تعمیرگاه می‌شوند. متوسط زمان بین دو ورود نیم ساعت است. مدت زمان تعمیر، نمایی با میانگین ۲۴ دقیقه فرض می‌شود. اگر اتومبیلی واردشود وفضای محوطهٔ تعمیرگاه‌پر باشد، ازقبول این اتومبیل‌خودداری‌می‌شود. فضای محوطهٔ تعمیرگاه‌باید گنجایش چند اتومبیل را داشته‌باشد تابتوان حداقل ۵۰ درصد اتومبیلهایی را که مراجعه می‌کنند قبول کرد؟

۱۰. برای تلفنهای راه دور، متقاضیان به یك شعبهٔ مخابرات،که دارای امکانات برای دو مکالمه است، مراجعه می‌کنند. در شلوغترین ساعت روز به‌طور متوسط ۱۵ تقاضای مکالمه درساعت وجوددارد وفاصلهٔ بین دونفرمراجعه کننده متغیری تصادفی با توزیع‌نمایی است. مدت‌زمان هرمکالمه نیز نمایی با میانگین ۵ دقیقه است.

الف. احتمال اینکه کسی مراجعه کند وبتواند بلافاصله تلفن بزند، چقدراست؟

ب. مدت‌زمان انتظار هرمشتری درصف چقدراست؟

۱۱. کارخانه‌ای دارای ۱۲ ماشین مشابه است. کارهایی که ارجاع می‌شود، برمبنای فرایند پواسون با میانگین ۱۸ کار در ساعت است. متوسط نرخ تولید به‌ازای‌هرماشین، ۵ کار درساعت است ومدت زمان انجام آنها نیز نمایی فرض می‌شود

الف. میانگین تعداد ماشینهای بیکار چقدر است؟

ب. تابع توزیع تعداد کارهایی که منتظر می‌مانند را به‌دست آورید.

۱۲. دریك دفتر سه‌منشی کار می‌کنند. کارهایی که به‌این منشیها ارجاع می‌شود، طبق فرایند پواسون است. درهشت ساعت‌کاراین منشیها به‌طورمتوسط ۲۰ کاربه‌آنها ارجاع می‌شود. مدتی که یك منشی برای هرکار باید صرف کند، دارای توزیع‌نمایی با میانگین ۴۰ دقیقه است.

الف. درچه درصدی اززمان همهٔ منشیها مشغول‌اند؟

ب. درچه درصدی اززمان هرمنشی مشغول است؟

ج. اززمان ارجاع یك‌کار، تا اتمام آن به‌طورمتوسط چقدرطول می‌کشد؟

۱۳. دریك بانك، دریافت توسط یك نفر وپرداخت توسط شخص دیگری انجام می‌شود. متوسط مدت دریافت یاپرداخت مربوط به‌هرمشتری ۳ دقیقه‌است واین مدت متغیرتصادفی با توزیع نمایی فرض می‌شود. ورود مشتریها برای‌پرداخت ودریافت طبق فرایندپواسون است. به‌طور متوسط هر ساعت ۱۶ نفر برای پرداخت و ۱۴ نفر برای دریافت مراجعه



می‌کنند. مدت زمان انتظار هرمشتری چقدر است؟ اگر هردوکارمند بانك، هم کارهای دریافت وهم پرداخت را انجام‌دهند، میانگین مدت‌زمان انتظارهرمشتری چقدرخواهدشد؟

۱۴. در مرکز اطلاعات یك اداره، دونفر مأمور با کمك سه‌خط تلفن به‌سؤالات مراجعین پاسخ می‌گویند. سؤال‌کنندگان براساس فرایند پواسون تلفن می‌زنند (به‌طور متوسط هر ساعت ۱۰ نفر) مدت‌زمان لازم برای پاسخ، نمایی با متوسط ۵ دقیقه فرض می‌شود. اگر هردو مأمور مشغول باشند ونفر سومی تلفن بزند، دراین صورت این شخص پشت خط‌سوم منتظر می‌ماند تا نوبت به‌او برسد. اما چنانچه‌کسی تلفن بزند وهر سه‌خط اشغال باشد، سؤال‌کننده اجباراً منصرف می‌شود (یابعداً تلفن می‌زندکه دراین‌صورت حقی برای نوبت تلفن قبلی خود نخواهد داشت)

الف. این مسئله با چه مدلی تطبیق می‌کند. نمودارآهنگ آن را رسم‌کنید.

ب. احتمال اینکه کسی تلفن بزند وبه‌علت اشغال‌بودن هر سه‌خط منصرف شود، چیست؟

ج. احتمال اینکه کسی تلفن بزند وبلافاصله به‌سؤالش پاسخ داده‌شود، چیست؟

د. احتمال اینکه کسی تلفن بزند وبرای دریافت پاسخ مجبور شود پشت‌خط صبرکند، چیست؟ میانگین مدت‌زمان انتظار او دراین حالت چقدراست؟

۱۵. ورود هواپیماها به فرودگاه طبق فرایند پواسون با میانگین ۱۸ هواپیما درساعت است. مدت‌زمان استفاده از باند فرودگاه برای هرهواپیما براساس توزیع‌نمایی بامیانگین ۲٫۵ دقیقه است. اگر بخواهیم به احتمال بیش از ۸۰ درصد هیچ هواپیمایی منتظرنماند چندباند موردنیازاست؟

۱۶. دریك فروشگاه که فقط یك صندوقدار دارد، مشتریها براساس فرایند پواسون مراجعه می‌کنند. (بامیانگین ۱۰ نفر درساعت). مدت‌زمانی که صندوقدارصرف هرمشتری می‌کند، متغیری تصادفی با توزیع نمایی است. اگر فقط یك نفرمشتری درصندوق باشد، میانگین این متغیرتصادفی ۲٫۵ دقیقه خواهد بود، اما چنانچه تعداد مشتری بیش از یك‌نفر باشد، یك نفر دیگر به‌صندوقدار کمك می‌کند واین زمان به ۳ دقیقه کاهش می‌یابد.

الف. نمودارآهنگ این مدل را رسم‌کنید ومعادلات تعادلی را بنویسید.

ب. تابع توزیع تعداد مشتریها را درصندوق به‌دست آورید.

ج. میانگین مدت‌زمان انتظار هرمشتری را درصف محاسبه‌کنید.

۱۷. دریك فروشگاه مراجعه مشتریها براساس فرایند پواسون است (به‌طور متوسط هر ساعت ۱۲ مشتری). مدت زمان خرید،نمایی با میانگین ۴ دقیقه وفروشگاه دارای یك فروشنده است.

الف. میانگین مدت‌زمان توقف هرمشتری درفروشگاه را به‌دست‌آورید.

ب. احتمال اینکه حداکثر سه مشتری درسیستم باشد، چیست؟

ج. حال فرض‌کنیدکه اگر تعداد مشتری درفروشگاه به‌بیش از دو (سه یا بیشتر) برسد،دو

فروشنده مشغول به‌کار می‌شوند و اگر تعداد به‌بیش ازچهار برسد، به‌هر فروشنده یك‌دستیار داده می‌شود، به‌طوری که مدت زمان خدمت به ۳ دقیقه کاهش می‌یابد. نمودار آهنگ را رسم کنید.

د. در بند ج، احتمال اینکه دوفروشنده مشغول به‌کار باشند، چیست؟

ه. در بند ج، میانگین مدت‌زمان توقف هرمشتری در فروشگاه را به‌دست آورید.

۱۸. با استفاده از نتایج $M/M/m/K$، رابطهٔ $\pi_0$ را برای حالت $M/M/m$ تعیین کنید.

۱۹. رابطهٔ (۷۵.۶) را مستقیماً براساس تعریف $B$ به‌دست آورید.

۲۰. رابطه‌های (۷۴.۶)، (۷۵.۶) و (۷۶.۶) را برای $M/M/2$ نیز به‌دست آورید.

۲۱. یك‌سیستم صف با ۵ خدمت‌دهنده را در نظر بگیرید. یك‌مشتری وارد می‌شود و ملاحظه می‌کند که ۱۰ نفر درصف هستند. مدت‌زمان خدمت توسط هر خدمت‌دهنده، نمایی بامیانگین ۱۰ دقیقه فرض می‌شود.

الف. میانگین مدت‌زمانی راکه طول می‌کشد تا اولین مشتری خارج شود به‌دست آورید.

ب. میانگین مدت‌زمانی را که این مشتری درصف می‌گذراند به‌دست آورید.

ج. میانگین‌مدت‌زمانی راکه طول‌می‌کشد تااین مشتری ازسیستم‌خارج‌شود به‌دست‌آورید.

د. اگر بعد از ورود این مشتری از ورود مشتریهای بعدی جلوگیری به‌عمل آید، میانگین مدت‌زمانی که طول می‌کشد تا سیستم خالی شود، چقدراست؟

۲۲. شرکتی می‌تواند برای انجام کارهای کامپیوتری خود، بایکی از دو مرکز «الف» یا «ب» قرارداد ببندد. هر مرکز از تعدادی عناصر مختلف تشکیل شده‌است. تعداد عناصر یك مرکز که خراب می‌شوند، طبق فرایند پواسون و با آهنگ $a_1$ و $a_2$ درهرساعت (به‌ترتیب برای مراکز الف و ب) است. تعمیر هرعنصری که خراب بشود، بلافاصله توسط یك‌تعمیرکار جداگانه آغاز می‌گردد. تعداد این تعمیرکاران درحدی است که هر گز هیچ عنصری منتظر تعمیرکار نمی‌ماند. مدت‌زمان تعمیر هرعنصر، نمایی و با میانگین $b_1$ و $b_2$ ساعت (به‌ترتیب برای مراکز الف و ب) فرض می‌شود. چنانچه حتی یك عنصر هرمرکز خراب باشد، ادامهٔ کار متوقف می‌شود.

الف. درچند درصد اوقات، هرمرکز کار می‌کند؟

ب. چنانچه خسارت توقف هرساعت کار $C$ و هزینهٔ کرایه‌هرساعت مرکز الف و ب به‌ترتیب $S_1$ و $S_2$ باشد، دراین‌صورت باکدام مرکز باید قرارداد بست؟

۲۳. برای تعمیر ۱۰ ماشین، ۲ نفر تعمیرکار تعیین شده‌اند. مدت‌زمان کارکردن هرماشین، قبل از خراب‌شدن، متغیری تصادفی با توزیع نمایی ومیانگین ۵ ساعت است. میانگین مدت‌زمان تعمیر، که طبق توزیع‌نمایی است، ۲۰ دقیقه فرض می‌شود.

الف. میانگین تعداد ماشینهای خراب چقدراست؟



ب. میانگین مدت‌زمانی که یك ماشین منتظر تعمیرکار می‌ماند، چقدراست؟

ج. اگر این دو تعمیرکار باهم کارکنند و درآن واحد فقط یك ماشین را تعمیر کنند، مدت زمان تعمیر به ۲۰ دقیقه کاهش می‌یابد. آیا این نحوهٔ کاربهتراست؟

۲۴. سیستم صفی با یك خدمت‌دهنده را درنظر بگیرید. اگر مدت زمان انتظار یك مشتری درصف زیاد طول‌بکشد، احتمالا ازدریافت خدمت‌منصرف وازصف وسیستم خارج می‌شود. مدت‌زمانی که هرمشتری، قبل ازمنصرف‌شدن، درصف می‌گذراند، متغیری تصادفی با توزیع‌نمایی و پارامتر $r$ است. نمودارآهنگ را دراین مدل رسم کنید. احتمال اینکه دریك لحظه سیستم خالی باشد، چقدراست؟

۲۵. دریك‌کارگاه ۳ ماشین ودو تعمیرکاروجود دارد. مدت‌زمانی که ماشین‌کارمی‌کند (قبل از خراب‌شدن) متغیر تصادفی نمایی با میانگین ۱۰ ساعت و مدت‌زمان تعمیر نیزنمایی با میانگین ۸ ساعت است. به‌طورمتوسط درهرلحظه چندماشین خراب‌است؟ درچه‌درصدی ازاوقات، هردو تعمیرکار مشغول‌کار هستند؟ نمودارآهنگ این مسئله را رسم‌کنید وماتریس آهنگ‌گذار را بنویسید.

۲۶. دریك تعمیرگاه، اتومبیلها براساس فرایند پواسون مراجعه می‌کنند. زمان‌بین دوورود اتومبیلها، نمایی با میانگین ۴۰ دقیقه فرض می‌شود. مدت‌زمان تعمیرنیز، نمایی با میانگین ۳۰ دقیقه است اگر هراتومبیل به‌مساحتی حدود ۵ مترمربع نیازداشته باشد، تعیین‌کنید مساحت محوطهٔ پارکینگ اتومبیلها چقدر باید باشد تا با احتمال ۹۰ درصد، هراتومبیل که به تعمیرگاه مراجعه می‌کند بتواند دراین محوطه پارك‌کند ومجبور نباشد درخیابان منتظر بماند تا تعمیرش‌شروع شود.

۲۷. تعمیرکاری مسئول ۵ ماشین‌است. مدت‌زمانی که‌هرماشین بدون خراب‌شدن می‌تواند کارکند، متغیری تصادفی با توزیع نمایی وبا میانگین ۲ ساعت است. مدت‌زمان تعمیر هر ماشین نیزدارای توزیع نمایی است. این تعمیرکار می‌تواند به‌طورمتوسط ۳ ماشین را در ساعت تعمیرکند.

الف. احتمال اینکه همهٔ ماشینها مشغول‌کار باشند، چقدراست؟

ب. میانگین تعداد ماشینهایی که منتظر تعمیرهستند، چقدراست؟

ج. اگر این تعمیرکار مسئولیت ۶ ماشین را قبول کند، به‌سؤالات بندهای «الف» و «ب» مجدداً پاسخ دهید.

۲۸. تنها متخصص یك تعمیرگاه ۸۰ درصد اوقات مشغول به کار و ۲۰ درصد اوقات به علت نبودن‌کار بیکار است. ماشینها طبق فرایند پواسون، با آهنگ روزانه ۲ ماشین برای تعمیر، می‌رسد. مدت زمان تعمیر یك ماشین نمایی فرض می‌شود. دستمزد تعمیرکار و سایر هزینه‌های تعمیرگاه روزانه ۵۰۰ تومان است. اگر ماشینی که برای تعمیر به تعمیرگاه می‌رسد، بلافاصله‌تعمیرنشود، باید با هزینهٔ ۱۰۰ آن را انبارکرد (مدت انبارشدن تأثیری

بـر هزینه ندارد). علاوه بـر اینها، چنانچه مدت زمان توقف ماشین در تعمیرگاه بیش از دوروز باشد، باید جریمه‌ای برابر با ۱۰۰ نیز پرداخت شود.

الف. میانگین مدت‌زمان تعمیر چند روزاست؟

ب. به‌طور متوسط روزانه چند ماشین از این تعمیرگاه خارج می‌شوند؟

ج. به‌طور متوسط هزینهٔ تعمیر هرماشین چقدراست؟

۲۹. دریك بخش تخصصی کارخانـه‌ای چهارماشین مخصوص وجود دارد، که ادارهٔ آنها نیازبه تخصص ویژه‌دارد. متخصصین واجد شرایط که دراین‌کارخانه استخدام می‌شوند، با توجه به‌تقاضای بازار و دریافت پیشنهادهای استخدامی جدید بعد ازمدتی‌کار خود را ترك می‌کنند. مدتی کـه یك متخصص دراین کارخانه می‌ماند، متغیری تصادفی با توزیع‌نمایی و میانگین ۲ سال است. تعداد متخصصینی کـه برای استخدام مراجعه می‌کنند، براساس فرایند پواسون بامیانگین سالی ۵ متقاضی است. چنانچه چهارمتخصص دراستخدام‌کارخانه باشند، از استخدام جدید خودداری می‌شود.

الف. این‌مسئله را به‌صورت زنجیرهٔ مارکوف پیوسته نشان دهید و آهنگ‌گذار آن را رسم کنید.

ب. این مسئله با چه مدلی تطبیق می‌کند؟

ج. چنددرصد ازمتقاضیان استخدام نمی‌شوند؟

د. درهر لحظه، به‌طور متوسط چند ماشین به‌علت نبودن متخصص‌کار نمی‌کند؟

۳۰. ورود مشتریهای یك سیستم طبق فرایند پواسون با میانگین ۳۰ مشتری درساعت است. ۹۰ درصد مشتریهایی که وارد سیستم می‌شوند، چنانچه مشاهده‌کنند کـه حداقل سه‌مشتری دیگردرصف ایستاده‌اند از واردشدن به‌سیستم منصرف می‌شوند. مدت‌زمان خدمت، متغیری تصادفی با توزیع نمایی ومیانگین ۴ دقیقه است. نمودار آهنگ را رسم و میانگین تعداد مشتریهایی راکه درصف هستند محاسبه کنید.

۳۱. مدت‌زمان معاینهٔ هـر مریض توسط یك پزشك، نمایی است. این پزشك می‌تواند هر ساعت بـه‌طور متوسط ۱۰ مریض را معاینه‌کند. مـراجعهٔ بیماران طبق فرایند پواسون با میانگین ۱۲ مراجعه درساعت است، ولی درصورتی‌که ۱۰ بیمار منتظر باشند، بیش از ۸۰ درصد مراجعین منتظر نمی‌مانند و به‌سایرپزشکان مراجعه می‌کنند. نمودار آهنگ‌را رسم‌کنید. چند درصد اوقات این پزشك بیکاراست؟

۳۲. یك خط تولید از دوایستگاه پشت سرهم تشکیل شده‌است. قطعات پس ازطی‌ایستگاه اول به‌انبارنیم ساختهٔ بین دوایستگاه وازآنجا به‌ایستگاه دوم می‌روند. ظرفیت انبار،متناهی




وبرابر با $N$ است. مدت‌زمانی کـه یك قطعه درایستگاههای اول ودوم می‌گذراند، دارای توزیع‌نمایی باپارامترهای به‌ترتیب $\mu_1$ و $\mu_2$ است. مواد اولیه ورودی ایستگاه اول به‌طور نامتناهی موجود است ومحدودیتی هم برای انبارکردن خروجی ایستگاه دوم وجود ندارد. ولی چنانچه انبار بین دوایستگاه پرشود، تولید درایستگاه اول هم متوقف می‌شود.

الف. با تعریف حالت مناسب، این مدل را به‌شکل یك زنجیرهٔ مارکوف نشان‌دهید.

ب. این مدل با کدام مدل فرایند تولد ومرگ تطبیق می‌کند؟

ج. چه‌درصدی از اوقات تولید درهرکدام ازایستگاهها متوقف می‌شود؟

۳۳. دریك مدل $M/M/1$، چنانچه $\lambda$ و $\mu$ دوبرابر شونـد (بـه‌طور جداگانه وهمچنین به‌طور همزمان)، معیارهای ارزیابی چه تغییری می‌کند؟

۳۴. دریك مرکزآموزش کامپیوتر، دونفر مربی وپنج نفردانشجو کار می‌کنند. دانشجویان برنامه‌های خود را می‌نویسند و اگر اشکالی پیش بیاید با یکی ازمربیان مطرح می‌کنند. به‌طور متوسط مدت زمانی‌که یك دانشجوبدون برخورد با اشکالی‌کارمی‌کند، متغیرتصادفی نمایی با میانگین ۲ ساعت است. مدت زمان رفع اشکال نیز طبق توزیع‌نمایی با میانگین یك ربع ساعت فرض می‌شود.

الف. نمودار آهنگ را رسم‌کنید.

ب. احتمال اینکه دریك لحظه هردو مربی بیکار باشند، چیست؟

ج. احتمال اینکه یك دانشجو اشکال داشته‌باشد و مجبور باشد صبرکندتامربیها بیکار شوند، چیست؟ میانگین این انتظارچقدر است؟

# ۷

# سیستمهای مارکوفی

دراین‌فصل، سیستمهای‌صفی را که درچارچوب فرایند مارکوف قرارمی‌گیرند، موردبررسی قرارمی‌دهیم. از آنجا که‌رابطه‌های فرایند مارکوف، به‌ویژه در درازمدت، نسبتاً ساده است، سعی می‌کنیم مسائل صف را حتی‌الامکان طوری فورمولبندی کنیم که‌بتوان ازخواص مارکوفی بهره گرفت. همان طور که قبلا گفتیم، درصورتی‌یك فرایند را مارکوفی می‌نامند که‌درهر لحظه‌بتوان حرکت آیندهٔ‌آن را تنها براساس حالت فعلی آن‌پیش‌بینی کرد و به‌دانستن مسیر حرکت گذشته نیازی نباشد.

فرمولبندی یك‌مسئلهٔ صف، معمولا باتعریف حالت سیستم شروع می‌شود. اصولا حالت سیستم را می‌توان به شکلهای مختلف تعریف کرد، اما همهٔ آنها لزوماً به‌سیستمهای مارکوفی منتهی نمی‌شوند. بنابراین، نکتهٔ اصلی در فرمولبندی یك مسئلهٔ صف، انتخاب مناسب حالتهای آن است. همان‌طور که قبلا گفتیم، مدلهای فرایند تولد ومرگ حالتهای خاصی از سیستمهای مارکوفی هستند، مشروط براینکه تعداد مشتریهای داخل سیستم را حالت درنظربگیریم. اما، چنانچه‌درسیستمهای دیگرهم حالت سیستم به‌همین‌ترتیب تعریف شود، لزوماً درچارچوب فرایند مارکوف قرارنمی‌گیرند؛ لذا، برحسب مورد و با درنظر گرفتن شرایط، مجموعه حالتهای مناسبی را باید تعریف کرد. چنانچه غیرازاین عمل شود، درمسئلهٔ موردنظر، خاصیت فرایند مارکوف به‌کار گرفته‌نمی‌شود. درنتیجه، بررسی تحلیلی آن معمولا بسیار پیچیده و گاهی غیرممکن می‌شود.





همان طور که درمبحث زنجیره‌های مارکوف پیوسته گفته شد، مدت زمانی‌که سیستم در هرکدام ازحالتها توقف می‌کند، متغیری تصادفی با توزیع نمایی است. می‌توان ازاین خاصیت برای انتخاب مجموعهٔ‌حالتها استفاده کرد. به‌عبارت دیگر، برای اینکه سیستمی‌درچارچوب فرایند مارکوف گنجانیده شود،ضرورت دارد که‌حالتهای آن بادرنظر گرفتن خاصیت فوق تعریف شود.

بعد ازاینکه مجموعه حالتهای سیستم تعریف و مشخص شد، باید احتمالات حدی سیستم را محاسبه کرد. همان طور که گفته شد، زنجیره‌های مارکوف پیوسته را معمولا با ماتریس آهنگ گذار آن، یعنی $Q$، مشخص می‌کنند. آن‌گاه با استفاده ازقضیهٔ حدی، احتمالات حدی یعنی $\pi_j$ها را محاسبه می‌کنند. از طرف دیگر، می‌دانیم که با استفاده از نمودارآهنگ می‌توان همین نتیجه رامستقیما به‌دست آورد. به‌عبارت دیگر، $q_{ij}$ها (آهنگ انتقال سیستم از $i$ به $j$) را مستقیماً روی نمودار آهنگ نشان می‌دهیم. آن‌گاه، معادلات حدی را می‌نویسیم، که این‌کار دقیقاً معادل استفاده ازنتایج قضیهٔ حدی است. بنابراین، در عمل معمولا راحت‌ترین روش برای محاسبه $\pi_j$ها استفاده ازنمودار آهنگ است.

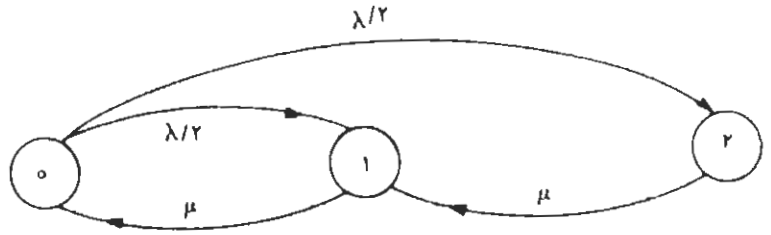
بعد از محاسبهٔ احتمالات حدی، سایر اطلاعات موردنیاز نظیر امید ریاضی طول صف، امید ریاضی زمان انتظار ونظایر اینها را می‌توان به‌دست آورد.

## ۱.۷ یك مثال

ماشینهایی راکه دارای دوموتور هستند. برای تعمیر به‌تعمیرگاهی می‌فرستند. پنجاه درصد ماشینهایی که به تعمیرگاه آورده می‌شوند، هردو موتورشان خراب‌است و ۵۰٪ بقیه فقط یك‌موتورشان نیاز به‌تعمیر دارد. فرض‌کنید که زمان بین دوورود متوالی ماشینها متغیری تصادفی و نمایی با پارامتر $\lambda$ ومدت‌زمان تعمیر هرموتور نیز نمایی با پارامتر $\mu$ است. اگر ماشینی در تعمیرگاه باشد، از قبول ماشین جدید خودداری می‌شود. احتمال اینکه ماشینی برای تعمیر به‌تعمیرگاه‌آورده شود، ولی به‌علت وجود ماشین دیگری درتعمیرگاه، تعمیر نشود، چقدر است؟

حل: اگر حالت سیستم را تعداد ماشینهای داخل تعمیرگاه درنظر بگیریم، مدل حاصله فرایند مارکوف نخواهد بود. برای اینکه این موضوع نشان داده شود، حالتی را درنظربگیرید که یك ماشین درتعمیرگاه باشد. مدت زمان توقف سیستم دراین حالت برابربا مدت‌زمان تعمیرماشین است، که‌این متغیرتصادفی دارای توزیع لزوماً نمایی‌نیست (به‌احتمال ۵۰ درصد نمایی و به احتمال ۵۰ درصد ارلانگی است). همان‌طور که قبلا گفتیم، برای اینکه مسئله را به‌شکل فرایند مارکوف فورموله کنیم، لازم است که حالتها طوری تعریف شوند که مدت توقف سیستم درهر حالت نمایی باشد.

اکنون، حالت سیستم را تعداد موتورهای تعمیر نشده درنظربگیرید. با این تعریف، سیستم دارای سه‌حالت صفر، یك و دو است. شکل ۱.۷ نمودار آهنگ این مدل را نشان




**شکل ۱.۷** نمودار آهنگ مثال تعمیرگاه

می‌دهد. آهنگ گذار سیستم ازصفر به‌یك برابر با آهنگ ورود یك ماشین با یك موتور خراب است (یعنی $\lambda/2$). به‌همین ترتیب، آهنگ گذار از صفر به‌دو نیز برابر با $\lambda/2$ است. از طرف دیگر، تغییرحالت سیستم از یك به دو امکانپذیر نیست، زیرا وقتی هنوز یك موتور تعمیر نشده در تعمیرگاه باقی مانده باشد، ماشین دیگری اجازه ورود ندارد. آهنگ گذارسیستم از ۲ به ۱ و یا از ۱ به‌صفر معادل آهنگ تعمیر یك‌موتور، یعنی $\mu$ است.

با مشخص شدن نمودار آهنگ، می‌توان احتمالات حدی، یعنی $\pi_i$ها، را با استفاده از روابط تعادلی به‌شرح زیرمحاسبه کرد.

گره ۰:
$$\lambda\pi_0=\mu\pi_1$$

گره ۱:
$$\mu\pi_1=\frac{\lambda}{2}\pi_0+\mu\pi_2$$

گره ۲:
$$\pi_0+\pi_1+\pi_2=1 \quad \text{و} \quad \mu\pi_2=\frac{\lambda}{2}\pi_0$$

ازحل معادلات فوق، نتایج زیر به‌دست می‌آید.

$$\pi_2=\frac{\lambda}{2\mu+3\lambda},\quad \pi_1=\frac{2\lambda}{2\mu+3\lambda},\quad \pi_0=\frac{2\mu}{2\mu+3\lambda} \tag{1.7}$$

همان طور که گفته شد، می‌توانیم به‌جای استفاده از نمودارآهنگ ازقضیهٔ احتمالات حدی استفاده کنیم، که دراین مسئله ماتریس آهنگ گذار عبارت است از:

$$Q=\begin{bmatrix} -\lambda & \frac{\lambda}{2} & \frac{\lambda}{2} \\ \mu & -\mu & 0 \\ 0 & \mu & -\mu \end{bmatrix} \tag{2.7}$$



از رابطهٔ $[\pi_0\ \pi_1\ \pi_2]Q=0$ می‌توان $\pi_0$ و $\pi_1$ و $\pi_2$ را به‌دست آورد، که با نتایج قبلی تطبیق خواهد کرد.

اکنون می‌توان به سؤال موردنظر پاسخ داد. احتمال اینکه ماشینی به تعمیرگاه مراجعه کند و ازقبول آن خودداری شود، برابراست با احتمال اینکه یك ماشین درتعمیرگاه باشد؛ و به‌عبارت دیگر، برابراست بااحتمال وجود یك یا دوموتور تعمیرنشده درتعمیرگاه، یعنی $\pi_1+\pi_2$.

## ۲.۷ مدل $M/M/1$ با ورود گروهی

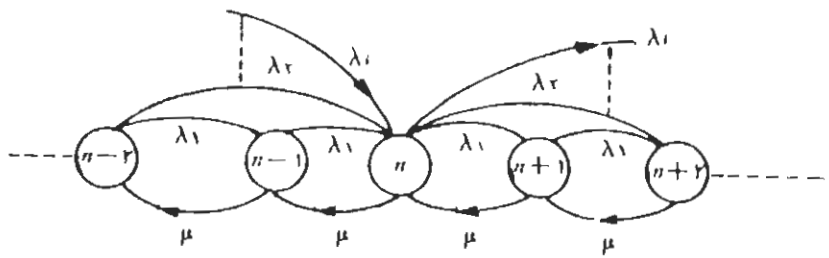
در این مدل، زمان بین دو ورود متوالی مشتریها را متغیری تصادفی با توزیع نمایی (و پارامتر $\lambda$) فرض می‌کنیم. لیکن، هر بار به جای یك مشتری، گروهی مشتری وارد سیستم می‌شوند و تعدادآنها نیزمتغیری تصادفی است. احتمال اینکه یك گروه مشتری از $i$ مشتری تشکیل شده باشد را برابربا $p_i$ فرض می‌کنیم. طبعاً

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i=1 \tag{3.7}$$

نمودار آهنگ این مدل درشکل ۲.۷ نشان داده شده است.

طبق قضیهٔ ۳.۳، اگر تعداد پیشامدها براساس فرایند پواسون و هر پیشامد به‌احتمال $p_i$ از نوع خاصی باشد، تعداد پیشامدهای از این نوع خاص نیز یك فرایند پواسون با پارامتر $\lambda p_i$ تشکیل می‌دهد. با توجه به‌این قضیه، تعداد گروههایی که وارد سیستم‌شوند و از $i$ مشتری تشکیل شده باشند، فرایندی پواسون با پارامتر $\lambda_i=\lambda p_i$ خواهد بود. به این ترتیب، آهنگ ورود مشتریان برابر است با

$$\lambda=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i \tag{4.7}$$




**شکل ۲.۷** نمودار آهنگ مدل نمایی با ورود گروهی.

معادلات تعادلی را می‌توان با استفاده از نمودار آهنگ، شکل ۲.۷، به‌شرح زیر نوشت.

$$\lambda\pi_0 = \mu\pi_1 \qquad (5.7)$$

$$(\lambda+\mu)\pi_n = \mu\pi_{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\lambda_k\pi_{n-k}\ ,\ n = 1, 2, \ldots$$

پس از حل این دستگاه معادلات، $\pi_0$ را به‌شرح زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\pi_0 = 1 - \frac{\lambda\sum_{i=1}^{\infty} i p_i}{\mu} \qquad (6.7)$$

چنانچه متغیر تصادفی $N$ را تعداد مشتریهای هر گروه بدانیم، میانگین آن عبارت خواهد بود از:

$$E(N) = \sum_{i=1}^{\infty} i p_i \qquad (7.7)$$

از طرف دیگر، آهنگ ورود مشتریان عبارت از میانگین تعداد مشتریهایی است که در واحد زمان وارد سیستم می‌شوند. این کمیت برابر با میانگین تعداد گروهها ضرب در میانگین تعداد مشتریان هر گروه است. بنابراین، آهنگ ورود مشتری برابر است با

$$\lambda\sum_{i=1}^{\infty} i p_i \qquad (8.7)$$

به‌این ترتیب، رابطهٔ (۶.۷) به‌رابطهٔ زیر تبدیل می‌شود:

$$\pi_0 = 1 - \rho \qquad (9.7)$$

پس از محاسبهٔ $\pi_0$، مقادیر $\pi_n$ به‌ازای $n = 1, 2, \ldots$ از معادلات (۵.۷) به‌دست می‌آید.

### محاسبهٔ $L$ در مدل $M/M/1$ با ورود گروهی

پس از محاسبه $\pi_n$ ها مقدار $L$ از رابطهٔ (۱۰.۵) محاسبه می‌شود. می‌توان نشان داد مقدار $L$ به‌شرح زیر خواهد بود.

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} + \frac{\rho\left[\frac{E(N^2)}{E(N)} - 1\right]}{2(1-\rho)} \qquad (10.7)$$

که $E(N)$ میانگین تعداد مشتریهای هر گروه و $E(N^2)$ امید ریاضی مجذور آنهاست. همان‌



طور که مشاهده می‌شود، اگر در هر گروه فقط یک مشتری وجود داشته باشد، یعنی مدل $M/M/1$ برقرار باشد، رابطهٔ $L$ نیز به‌همان رابطهٔ مربوط به $M/M/1$ تبدیل خواهد شد.

**مثال ۲.۷** یک سیستم صف $M/M/1$ با ورود گروهی را در نظر بگیرید. تعداد گروههایی که وارد سیستم می‌شوند، براساس فرایند پواسون با میانگین هر ساعت ۳ گروه است. تعداد مشتریهای هر گروه متغیری تصادفی با توزیع هندسی به‌شکل زیر است.

$$p_i = P[N = i] = (0.6)(0.4)^{i-1}$$

مدت زمانی که طول می‌کشد تا تنها خدمت دهنده به‌یک مشتری خدمت ارائه کند، متغیری تصادفی و نمایی با میانگین ده‌دقیقه است. احتمال اینکه در درازمدت $n$ مشتری در سیستم باشد، چیست؟ $L$ را محاسبه کنید.

حل: طبق مفروضات، $\lambda = 3$، $\mu = 6$ و $\lambda_n = 1.8(0.4)^{n-1}$ است. طبق توزیع هندسی $E(N)$ و $E(N^2)$ به‌شرح زیر محاسبه می‌شوند:

$$E[N] = \frac{1}{0.6}$$

$$E[N^2] = Var[N] + E[N]^2 = \frac{0.4}{0.36} + \frac{1}{0.36} = \frac{1.4}{0.36}$$

$\pi_0$ از رابطهٔ (۹.۷) به‌دست می‌آید.

$$\pi_0 = 1 - \frac{\lambda E[N]}{\mu} = \frac{1}{6}$$

با استفاده از رابطهٔ (۵.۷) مقادیر $\pi_n$ را محاسبه می‌کنیم، اگر چه فقط برای تعداد متناهی $n$ چنین محاسباتی عملی است. برای نمونه، با در نظر گرفتن $\lambda = 3$، $\lambda_1 = 1.8$ و $\lambda_2 = 0.72$ خواهیم داشت:

$$\pi_1 = \frac{\lambda}{\mu}\pi_0 = \frac{1}{12}$$

به‌همین ترتیب،

$$\pi_2 = \frac{0.9}{12} = 0.075$$

و

$$\pi_3 = \frac{(0.9)^2}{12} = 0.0675$$

و با استفاده از رابطهٔ (۱۰.۷)،

$$L=\frac{۵۰}{۶}.$$

**حالت خاص.** حال فرض کنید کـه تعداد مشتریهای هر گروه دقیقاً برابر با $b$ است. دراین‌صورت با درنظر گرفتن اینکه $\rho=\lambda b/\mu$ است،

$$L=\frac{\rho(۱+b)}{۲(۱-\rho)} \qquad (۱۱.۷)$$

و

$$W=\frac{۱+b}{۲\mu(۱-\rho)} \qquad (۱۲.۷)$$

**مثال ۳.۷** درقسمت کنترل کیفیت کارخانه‌ای نمونه‌های ۱۵ تایی طبق فرایند پواسون (بطور متوسط ۸ نمونه در ساعت) وارد می‌شود. مدت زمـان بررسی هر قطعه، نمایی با میانگین ۰٫۲۵ دقیقه است. تمام نمونه‌ها باید موردبررسی قرار گیرند. به‌طورمتوسط در هر لحظه چند قطعه درقسمت کنترل کیفیت بسـاعت می‌شود؟ مدت زمـان انتظار هرقطعه برای بررسی چقدر است؟

حل: این مسئله، یك مـدل $M/M/1$ با ورود گروهی (دقیقاً $b=۱۵$) و همچنین $\lambda=۸$ و $\mu=۲۴۰$ و $\rho=\lambda b/\mu=۰٫۵$ است. طبق رابطه‌هـای (۱۱.۷) و (۱۲.۷)، $L=۸$ و (ساعت) $W=۰٫۰۶۶$ یا (دقیقه) $W=۴$ و (دقیقه) $W_q=۳٫۵$ خواهد بود.

$C/V_\Delta$

**محاسبهٔ $\pi_n$ با استفاده از تبدیل $z$**

مقدار $\pi_n$ $(n=۱, ۲, \ldots)$ را با استفاده از تبدیل $z$ نیزمی‌توان محاسبه کرد. (برای مطالعهٔ بیشتر در مـورد تبدیل $z$ به‌فصل دوم بخش ۱۲ مراجعه شود). فرض کنید $P(z)$ و $K(z)$ به‌ترتیب معرف تبدیل $z$ مقادیر $\pi_n$ و $p_n$ باشند. به‌عبارت دیگر

$$K(z)=\sum_{n=0}^{\infty}p_n z^n \quad \text{و} \quad P(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\pi_n z^n \qquad (۱۳.۷)$$

دراین صورت، مقدار $P(z)$ ازرابطهٔ زیرحاصل می‌شود:

$$P(z)=\frac{\mu\pi_0(۱-z)}{\mu(۱-z)-\lambda z[۱-K(z)]} \qquad (۱۴.۷)$$

اثبات این رابطه درمثال ۲۲.۲ ارائه شده است (با فرض $L(z)=\lambda K(z)$)

با استفاده ازخواص تبدیل $z$ و رابطهٔ $P(z)$ بـا $\pi_n$، می‌تـوان $\pi_n$ را محاسبه کرد.



ضمناً، با درنظر گرفتن رابطه (۱۹.۵) می‌دانیم که

$$L=\left.\frac{dP(z)}{dz}\right|_{z=۱}$$

**مثال ۴.۷** مثال ۲.۷ را مجدداً درنظر بگیرید. دراین مدل

$$K(z)=\sum_{i=۱}^{\infty}p_i z^i=\frac{۰٫۶z}{۱-۰٫۴z} \qquad (۱۵.۷)$$

و

$$۱-K(z)=\frac{۱-z}{۱-۰٫۴z}$$

با درنظر گرفتن اینکه $\pi_0=۱/۶$ و $\rho=۵/۶$ و $\mu=۶$ است، رابطهٔ (۱۴.۷) به‌شرح زیر ساده می‌شود:

$$P(z)=\frac{۱-۰٫۴z}{۶[۱-۰٫۹z]}$$

از طرف دیگر با استفاده ازخاصیت تصاعد هندسی،

$$\sum_{n=0}^{\infty}(۰٫۹z)^n=\frac{۱}{۱-۰٫۹z}$$

بنابراین،

$$P(z)=\frac{۱}{۶}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(۰٫۹z)^n-۰٫۴\sum_{n=0}^{\infty}(۰٫۹)^n z^{n+۱}\right]$$

برای محاسبه $\pi_n$، ازرابطهٔ کلی زیراستفاده می‌شود:

$$\pi_n=\frac{۱}{n!}\left.\frac{dP(z)}{dz}\right|_{z=0}=\frac{(۰٫۹)^{n-۱}}{۱۲}$$

و

$$L=\left.\frac{dP(z)}{dz}\right|_{z=۱}=\frac{۵۰}{۶}$$

ضمناً $L$ را می‌توان از رابطهٔ (۱۸.۵) وبـا استفاده ازمقادیر $\pi_n$، که ازرابطهٔ فوق به‌دست می‌آید، نیزمحاسبه کرد.

۸۸

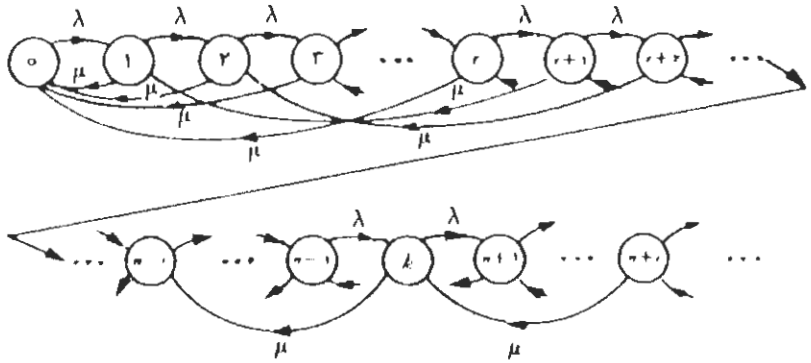
(۲)

## ۳.۷ مدل $M/M/1$ با خدمت گروهی

دراین‌مدل، فرض می‌کنیم که هرخدمت‌دهنده، هربار به‌جای یك مشتری به‌گروهی ازمشتریها، به‌طور همزمان، خدمت ارائه می‌کند. مدت خدمت، نمایی با پارامتر $\mu$ است. ورودمشتریها براساس فرایند پواسون با آهنگ $\lambda$ درنظر گرفته می‌شود. ضمناً فرض می‌کنیم که مشتریها به‌صورت انفرادی وارد سیستم می‌شوند. موقعی که یك خدمت دهنده بیکار می‌شود، به‌طور همزمان به‌خدمت $r$ مشتری می‌پردازد. چنانچه تعداد مشتریهایی که درصف منتظر هستند کمتر از $r$ باشد، سیستم می‌تواند به‌دونوع مختلف عمل کند. نوع اول این است که خدمت دهنده باهمان تعداد مشتری کار را شروع کند و منتظر نماند که تعداد مشتریها به‌حد نصاب $r$ برسد. در نوع دوم، خدمت‌دهنده باید دقیقاً به $r$ مشتری خدمت ارائه کند. دراین صورت، سیستم منتظر می‌ماند تا تعداد مشتریهای داخل صف به $r$ برسد.

ابتدا نوع اول را درنظر بگیرید. تعداد مشتریهای داخل سیستم را حالت تعریف می‌کنیم. نمودار آهنگ این مدل در شکل ۳.۷ نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، به‌دودلیل حالت سیستم تغییرمی‌کند. یکی ورود مشتری جدید با آهنگ $\lambda$ است، که در این صورت به‌تعداد مشتریها یکی اضافه می‌شود و حالت سیستم نیز به‌همین‌ترتیب تغییرمی‌کند. علت دیگر تغییر حالت سیستم، اتمام کارخدمت دهنده است، که دراین‌صورت از تعداد مشتریهای داخل سیستم نیز کاسته می‌شود. درمورد اخیر، تغییر حالت سیستم بستگی به‌حالت فعلی آن دارد. اگر حالت‌سیستم مساوی با یا بیشتر از $r$ باشد، تعداد مشتریانی که خارج می‌شوند برابر با $r$ است. اما اگر حالت سیستم کمتر از $r$ باشد، خدمت‌دهنده نیز به‌همین تعداد مشتری خدمت ارائه کرده است و تمام مشتریها خارج می‌شوند و حالت سیستم به‌صفر می‌رسد.

با استفاده از نمودار آهنگ، معادلات تعادلی را به‌شرح زیر می‌نویسیم:




**شکل ۳.۷** نمودار آهنگ مدل $M/M/1$ باخدمت گروهی



$$\lambda\pi_0=\mu(\pi_1+\pi_2+\cdots+\pi_r) \qquad (۱۶.۷)$$

$$(\lambda+\mu)\pi_n=\lambda\pi_{n-1}+\mu\pi_{n+r}, \qquad n\geq 1 \qquad (۱۷.۷)$$

(همان طور که نمودار آهنگ نشان می‌دهد، دراین مدل فرض شده است که اگر تعداد مشتریهایی که درحال دریافت خدمت هستند کمتر از $r$ باشد ومشتری جدیدی وارد شود، به‌این مشتری نیز بلافاصله وهمزمان با سایرمشتریها خدمت ارائه خواهد شد. چنانچه این فرض صدق نکند، از حالتهای ۲، ۳، ...، $r$ لزوماً برگشت به‌صفرصورت نمی‌گیرد. فرض کنید که درلحظهٔ شروع خدمت، فقط دومشتری درصف و $r>2$ باشد. اگر دراثنای ارائه خدمت یك مشتری جدید هم وارد شود، باید درصف منتظر بماند، بنابراین، پس ازارائهٔ خدمت این دومشتری سیستم را ترك می‌کنند، ولی حالت سیستم به‌یك می‌رسد)

دستگاه معادلات شماره‌های (۱۶.۷) و (۱۷.۷) را می‌توان با استفاده از تبدیل $z$ و یا **معادلهٔ مشخصه** حل کرد، روش دوم به حل معادلهٔ زیر، که به‌معادلهٔ مشخصه موسوم است، منجر می‌شود.

$$\mu x^{r+1}-(\lambda+\mu)x+\lambda=0 \qquad (۱۸.۷)$$

معادلهٔ فوق ازدرجهٔ $(r+1)$ است و می‌تواند حداکثر دارای همین تعداد ریشه باشد. بدیهی است عدد یك همواره یکی از ریشه‌هاست. از طرف دیگر، ثابت می‌کنیم که این معادله فقط دارای یك ریشه بین صفر و یك است که آن‌را $x_0$ می‌نامیم. پس ازمحاسبهٔ $x_0$، جواب معادلات تعادلی (۱۶.۷) و (۱۷.۷) به‌شرح زیر به‌دست می‌آید:

$$\pi_0=1-x_0 \qquad (۱۹.۷)$$

$$\pi_n=(1-x_0)x_0^n, \qquad n=1,2,\ldots \qquad (۲۰.۷)$$

همان طور که مشاهده می‌شود، احتمالات حدی دراین مدل مشابه معادلات حدی درمدل $M/M/1$ است؛ مگر دراین موردکه به جای $\rho$ مقدار $x_0$ قرار گرفته است. لذا می‌توان نشان داد که رابطه‌های زیر نیز برقراراست:

$$L=\frac{x_0}{1-x_0} \qquad (۲۱.۷)$$

$$W=\frac{x_0}{\lambda(1-x_0)} \qquad (۲۲.۷)$$

**مثال ۵.۷** دریك سیستم صف، خدمت دهنده می‌تواند به‌طور همزمان حداکثر به دو مشتری خدمت ارائه کند. ورود مشتریها طبق فرایند پواسون با آهنگ ۱۵ مشتری درساعت ومدت زمان خدمت نمایی با میانگین ۶ دقیقه است. میانگین تعداد مشتریهای داخل سیستم چقدراست؟ احتمال اینکه بیش ازچهارمشتری درسیستم باشد، چقدراست؟

حل: مفروضات مسئله $r=2$ و $\lambda=15$ و $\mu=10$ است. معادلهٔ مشخصه برای این مسئله، طبق رابطهٔ (۱۸.۷) عبارت است از:

$$10x^3-25x+15=0$$

این دستگاه معادله دارای سه ریشه به‌شرح زیر است

$$\frac{\sqrt{7}-1}{2} \qquad \frac{-\sqrt{7}-1}{2}, \frac{\sqrt{7}-1}{2}, 1$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، فقط یکی از ریشه‌ها، یعنی $\frac{\sqrt{7}-1}{2}=0.823$، عددی بین صفر و یک است، که آن را با $x_0$ نشان می‌دهیم. لذا

$$L=\frac{0.823}{1-0.823}=4.65$$

واحتمال اینکه بیش از چهار مشتری درسیستم باشند، برابر است با

$$\sum_{i=5}^{\infty}\pi_i=(1-x_0)\sum_{i=5}^{\infty}x_0^i=x_0^5=0.38$$

حال مدل $M/M/1$ با خدمت گروهی را در نظر بگیرید، که خدمت‌دهنده فقط به $r$ مشتری خدمت می‌دهد. دراین مدل، چنانچه خدمت‌دهنده بیکار شود، اما تعداد مشتریهای داخل صف کمتر از $r$ باشد، ارائهٔ خدمت انجام نمی‌شود. خدمت‌دهنده منتظر می‌ماند تا مشتریهای جدیدی وارد سیستم شوند و در لحظه‌ای که $r$ امین مشتری وارد می‌شود، کار خود را شروع می‌کند. نمودار آهنگ این مدل درشکل ۴.۷ نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، دراین مدل فقط به گروههای $r$ عددی خدمت ارائه می‌شود و تفاوت آن با مدل شکل ۳.۷ مربوط به‌حالتهای ۱ تا $r-1$ است.

با استفاده از نمودار آهنگ، معادلات تعادلی به‌شرح زیر نوشته می‌شود:

$$\lambda\pi_0=\mu\pi_r \qquad (23.7)$$

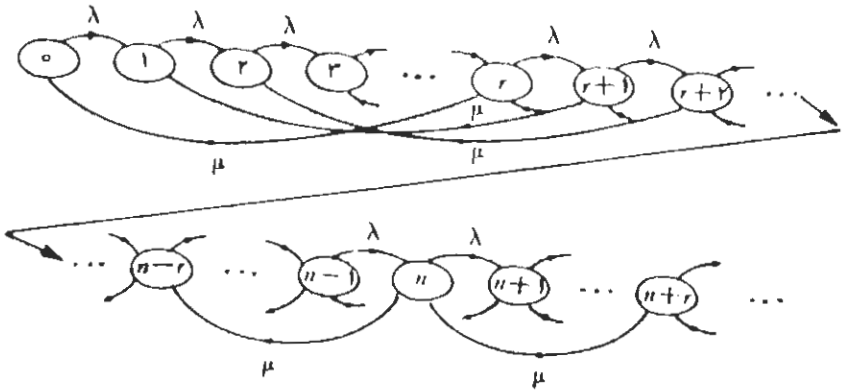
$$\lambda\pi_n=\lambda\pi_{n-1}+\mu\pi_{n+r}, \quad 1\leqslant n<r \qquad (24.7)$$

$$(\lambda+\mu)\pi_n=\lambda\pi_{n-1}+\mu\pi_{n+r}, \quad r\leqslant n \qquad (25.7)$$

برای حل معادلات فوق، مجدداً معادلهٔ مشخصهٔ (۱۸.۷) را حل می‌کنیم و $x_0$ را به‌دست می‌آوریم. می‌توان نشان داد که دراین مدل، احتمالات حدی عبارت‌اند از:

$$\pi_n=\frac{1-x_0}{r} \qquad (26.7)$$






**شکل ۴.۷** نمودار آهنگ مدل نمایی با خدمت گروهی (دقیقاً $r$ مشتری)

$$\pi_n=\frac{1-x_0^{n+1}}{r}, \quad 1\leqslant n<r \qquad (27.7)$$

$$\pi_n=\pi_0\frac{\lambda}{\mu}\cdot x_0^{n-1}, \quad n\geqslant r \qquad (28.7)$$

**مثال ۶.۷** درمثال ۵.۷ فرض کنید که خدمت‌دهنده دقیقاً به‌دومشتری خدمت می‌دهد؛ یعنی، صبر می‌کند تا حداقل دومشتری درصف منتظر باشند، تا ارائهٔ خدمت را شروع کند. دراین‌صورت، مسئله را مجدداً حل کنید.

حل: معادلهٔ مشخصه دراین مورد نیز تفاوتی نمی‌کند. بنابراین $x_0=0.823$ و

$$\pi_0=0.089$$

از رابطهٔ (۲۷.۷)

$$\pi_1=\frac{1-x_0^2}{2}=0.16$$

به‌ازای $n\geqslant 2$ از رابطه (۲۸.۷)

$$\pi_n=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\pi_0\cdot x_0^{n-1}=0.1328x_0^{n-2}$$

درنتیجه

$$L=\sum_{n=1}^{\infty}n\pi_n=\pi_1+\sum_{n=2}^{\infty}n\pi_n=0.16+0.1328\sum_{n=2}^{\infty}nx_0^{n-2}$$

ازطرف دیگر، طبق رابطهٔ (۷۰.۲)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x_0^{n-1} = \frac{1}{(1-x_0)^2} = ۳۱٫۹$$

بنابراین،

$$L = ۰٫۱۶ + \frac{۰٫۱۳۲۸}{x_0}\left[\sum_{n=1}^{\infty} n x_0^{n-1} - 1\right] = ۵٫۱۵$$

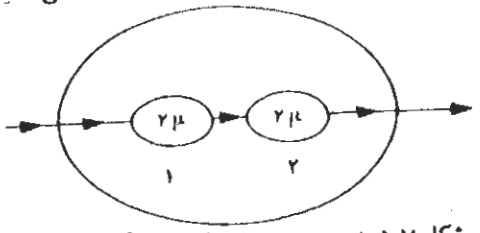
و

$$\sum_{i=5}^{\infty} \pi_i = ۰٫۱۳۲۸ \sum_{n=5}^{\infty} x_0^{n} = ۰٫۲۱$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، هم‌مقدار $L$ وهم مجموع احتمالات افزایش یافته‌است (چرا؟).

## ۴.۷ مدل $M/E_r/1$

در این سیستم، مشتریها براساس فرایند پواسون با آهنگ $\lambda$ وارد می‌شوند. مدت زمان خدمت تابع توزیع ارلانگی (با $r$ مرحله) فرض می‌شود. همان طور که در فصل سوم گفتیم، به‌علت انعطاف بسیار زیاد تابع توزیع ارلانگی، بسیاری ازمتغیرهای تصادفی را می‌توان با تقریب مناسب درقالب آن جا داد. ازطرف دیگر، برای اینکه بتوان ازخاصیت بدون حافظه‌بودن توزیع نمایی استفاده کرد، می‌توان متغیرتصادفی اولانگی را به‌چند متغیر تصادفی نمایی تجزیه کرد. فرض کنید که میانگین یك متغیرتصادفی اولانگی $1/\mu$ وپارامتر دیگر آن $r = 2$ باشد. با استفاده ازخاصیت متغیر تصادفی ارلانگی، می‌توان آن رامجموع دومتغیرتصادفی نمایی فرض کرد، که میانگین هر کدام از آنها برابر $1/2\mu$ خواهد بود. به‌عبارت دیگر، اگرمدت‌زمان خدمت براساس توزیع $E_2$ بامیانگین $1/\mu$ باشد، می‌توان فرض کرد که دراین سیستم، خدمت از دومرحلهٔ پشت‌سرهم تشکیل شده است، که مدت‌زمان خدمت درهرمرحله، نمایی با پارامتر $2\mu$ است (شکل ۵.۷). بدین‌ترتیب، باوجود اینکه خدمت موردنظر عملا فقط ازیك مرحله تشکیل شده‌است، می‌توان فرض کرد که به‌طور




**شکل ۵.۷** خدمت‌دهنده با توزیع ارلانگی دومرحله‌ای



ریاضی از دومرحلهٔ مجزا به‌وجود آمده است. به‌عبارت دیگر، مشتری ابتدا مرحلهٔ ۱ را می‌گذراند، که‌نمایی ودارای میانگین $1/2\mu$ است. سپس وارد مرحلهٔ ۲ می‌شود ودرآنجا نیز به‌طور متوسط به‌مدت $1/2\mu$ برای دریافت خدمت می‌ماند. پس ازطی هر دومرحله، مشتری سیستم را ترك‌می‌کند. چون عملا، دومرحلهٔ خدمت قابل تفکیك نیست (فقط از نظر ریاضی به دو مرحله تقسیم می‌شود). لذا در هر لحظه فقط یك مشتری دریکی از مراحل خدمت است ومرحلهٔ‌دیگرآن خالی ازمشتری است.

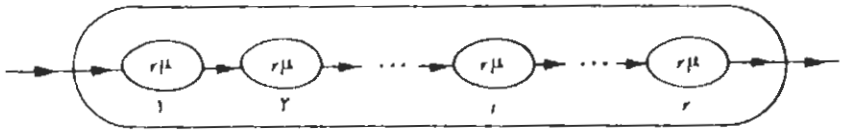
با استفاده از تعبیر فوق می‌توان ازمزایای خاصیت مارکوفی درمحاسبات استفاده کرد. به‌عبارت دیگر، اگر مرحله‌ای که مشتری درحال گذرانیدن آن است را حالت سیستم تعریف کنیم، باتوجه به‌خاصیت بدون حافظه‌بودن توزیع نمایی می‌توان فرض کرد که مشتری درست درهمین لحظه وارد این مرحله شده است. به این ترتیب، تنها اطلاعات مورد نیاز این است که مشتری چند مرحله را گذرانیده است. بنابراین، با تعریف مناسب برای حالت سیستم، می‌توان مسئله را به‌یك فرایند مارکوف تبدیل کرد.

استدلال فوق درموردتجزیهٔ یك تابع توزیع ارلانگی با پارامتر $r$ نیزصادق است. می‌توان فرض کرد که این متغیر ازمجموع $r$ متغیر تصادفی نمایی با پارامتر $r\mu$ تشکیل شده است (شکل ۶.۷). دراینجا نیز اگر حالت سیستم را تعداد مراحل طی‌شده توسط مشتری وهمچنین تعداد مشتریهای‌منتظردرصف تعریف کنیم، دارای یك سیستم‌مارکوفی خواهیم‌بود.

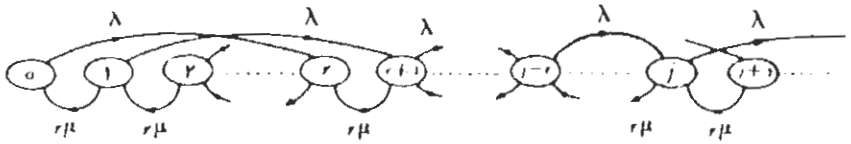
اگر سیستم دارای یك مشتری است که ۲ مرحلهٔ خدمت را گذرانیده است، این مشتری باید $r-2$ مرحلهٔ دیگر را هم بگذراند؛ یعنی، حالت سیستم برابر با $r-2$ است واگر غیر ازاین مشتری ۳ مشتری دیگر نیز در صف باشند، حالت سیستم برابر با $3r+(r-2)$ خواهد بود. به‌طور کلی، طبق تعریف فوق، اگر $n$ مشتری درسیستم باشند ویکی از آنها $m$ مرحله را گذرانیده باشد، حالت سیستم عبارت است از:

$$j = (n-1)r + (r-m) \quad , \quad m \leqslant r$$

با توجه به‌تعریف حالت سیستم، نمودار آهنگ این مدل مطابق شکل ۷.۷ خواهد بود.




**شکل ۶.۷** تجزیهٔ یك متغیر تصادفی ارلانگی $r$ مرحله‌ای




**شکل ۷.۷** نمودار آهنگ مدل $M/E_r/1$

همان‌طور که نمودار آهنگ نشان می‌دهد، به‌محض ورود یك مشتری، حالت سیستم افزایشی برابر با $r$ پیدا می‌کند، زیرا هرمشتری جدید باید $r$ مرحله خدمت را بگذراند. چون تعداد مراحل خدمت، حالت سیستم تعریف شده‌است؛ بنابراین، با پایان کار خدمت دهنده حالت سیستم به‌اندازهٔ یك واحد کاهش می‌یابد؛ لیکن، آهنگ خدمت‌دهی، طبق آنچه گفته‌شد برابر با $r\mu$ است.

معادلات تعادل دراین مدل، براساس نمودار آهنگ، عبارت‌اند از:

$$\lambda\pi'_0 = r\mu\pi'_1 \qquad (۲۹.۷)$$

$$(\lambda + r\mu)\pi'_j = r\mu\pi'_{j+1} \quad , \quad j = 1, 2, \dots, r-1 \qquad (۳۰.۷)$$

$$(\lambda + r\mu)\pi'_j = \lambda\pi'_{j-r} + r\mu\pi'_{j+1} \quad , \quad j = r, r+1, \dots \qquad (۳۱.۷)$$

درمعادلات فوق، $\pi'_j$ معرف احتمال وجود $j$ مرحلهٔ خدمت انجام نشدهٔ مشتریهاست. در بررسی یك سیستم صف، آنچه بیشتر مطرح است این است که چند مشتری درسیستم هستند. چنانچه $\pi_n$ را احتمال وجود $n$ مشتری درسیستم تعریف کنیم،

$$\pi_n = \sum_{j=(n-1)r+1}^{nr} \pi'_j \quad , \quad n = 1, 2, \dots \qquad (۳۲.۷)$$

چون مقادیر $\pi'_j$ ازمعادلات ۳۰.۷ و ۳۱.۷ به‌دست می‌آید، می‌توان $\pi_n$ را از رابطهٔ (۳۲.۷) محاسبه کرد؛ آن‌گاه، معیارهای ارزیابی را با استفاده از رابطهٔ (۱۷.۵) و استنتاج لیتل حساب می‌کنیم، که نتیجهٔ آنها به‌شرح زیر خواهد بود:

$$L_q = \frac{1+r}{2r} \cdot \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{1+r}{2r} \cdot \frac{\rho^2}{1-\rho} \qquad (۳۳.۷)$$

در رابطهٔ فوق، $\rho = \lambda/\mu$ است.

$$W_q = \frac{1+r}{2r} \cdot \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} \qquad (۳۴.۷)$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} \quad , \quad L = \lambda W \qquad (۳۵.۷)$$

### حالتهای خاص

اگر $r = 1$ باشد، مدل فوق تبدیل به $M/M/1$ می‌شود و رابطه‌های فوق با روابطی که قبلا برای این مدل به‌دست آوردیم تطبیق می‌کند.

اگر $r = \infty$ باشد، توزیع ارلانگی به متغیر قطعی و غیر احتمالی تبدیل می‌شود و



مدل حاصل $M/D/1$ خواهد بود. درنتیجه، برای این مدل معیارهای ارزیابی به‌شرح زیر به‌دست می‌آید.

$$L_q = \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho^2}{1-\rho} \qquad (۳۶.۷)$$

$$W_q = \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} \qquad (۳۷.۷)$$

**مثال ۷.۷** مرکز اورژانس یك شهر کوچك را درنظر بگیرید که فقط دارای یك آمبولانس است. تقاضا برای ارسال آمبولانس طبق فرایند پواسون به‌این مرکز می‌رسد. میانگین زمان بین هر دو تقاضای متوالی دو ساعت است. مدت‌زمانی که طول می‌کشد تا آمبولانس ازاین مرکز به‌محل حضور یك بیمار برسد، متغیری تصادفی با توزیع نمایی و میانگین ۱۰ دقیقه است. اگر یك بیمار تلفن بزند که برایش آمبولانس بفرستند، احتمال اینکه آمبولانس بلافاصله فرستاده شود، چقدراست؟ میانگین مدت‌زمان انتظاریك بیمار برای اینکه آمبولانس به‌منزلش برسد، چقدراست؟

حل: این سیستم یك مدل $M/E_2/1$ است. مدت زمان خدمت از مجموع دومتغیر تصادفی نمایی تشکیل می‌شود که عبارت اززمان رفت و برگشت آمبولانس است. بنابراین، مدت زمان خدمت دارای توزیع $E_2$ با میانگین ۲۰ دقیقه است. بدین‌ترتیب، $\mu = 3$ و $\lambda = 1/2$. احتمال اینکه آمبولانس بلافاصله برسد، برابر با $\pi_0$ است و

$$\pi_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = \frac{5}{6}$$

مدت‌زمان انتظارمشتری درصف، طبق رابطه (۳۴.۷)

$$W_q = \frac{1+2}{4} \cdot \frac{0.5}{3(3-0.5)} = \frac{1}{20} \text{ ساعت} = 3 \text{ دقیقه}$$

میانگین زمان انتظار یك مشتری تا لحظهٔ رسیدن آمبولانس عبارت ازمجموع زمان‌انتظار درصف (یعنی ۳ دقیقه) و مدت‌زمان رفتن آمبولانس ازمرکز به‌منزل او (یعنی ۱۰ دقیقه) است؛ بنابراین، باید به‌طورمتوسط ۱۳ دقیقه منتظر بماند.

**مثال ۸.۷** در یك سیستم صف، ورود مشتریها طبق فرایند پواسون با میانگین ۲۰ مشتری درساعت است. دراین سیستم، دونفرخدمت‌دهنده‌کارمی‌کنند. مدت‌زمان خدمت‌دارای توزیع‌نمایی بامیانگین ۴ دقیقه است. اگر به‌جای این دوخدمت‌دهنده، یك‌ماشین خریداری شود، که‌همان خدمت را انجام دهد، مدت‌زمان خدمت چقدر باید باشد تا تعداد مشتریهای داخل سیستم [redacted] افزایش [redacted] یابد؟

حل: سیستم فعلی یك مدل $M/M/2$ و سیستم پیشنهادی یك مدل $M/D/1$ است.

$L$ را دردوحالت باید مقایسه کرد. درهر دوسیستم $\lambda = ۲۰$ است

**مدل $M/M/۲$:**

دراین حالت $\mu = ۱۵$ و $\rho = ۲۰/۳۰ = ۲/۳$ است. طبق رابطهٔ (۲۲.۶)

$$\pi_0 = \frac{۱-\rho}{۱+\rho} = \frac{۱}{۵}$$

واز رابطهٔ (۲۷.۶) و استنتاج لیتل،

$$L = ۲٫۴$$

**مدل $M/D/۱$**

هدف تعیین $\mu$ (یا $\rho$) است به‌طوری‌که $L \leqslant ۲٫۴$ باشد. اما دراین مدل $r = \infty$ است، لذا ازرابطهٔ (۳۶.۷) نتیجه می‌شود که

$$L_q = \frac{۱}{۲} \cdot \frac{\rho^۲}{۱-\rho} \qquad (۳۸.۷)$$

و

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = \frac{۱}{۲} \cdot \frac{\rho^۲}{۱-\rho} + \rho \leqslant ۲٫۴$$

درنتیجه

$$\rho \leqslant ۰٫۸ \qquad \text{یا} \qquad \mu \geqslant ۲۵$$

پس مدت‌زمان خدمت باید کمتر از ۲٫۴ دقیقه باشد.

## ۵.۷ مدل $E_r/M/۱$

دراین مدل زمان بین دو ورود متوالی مشتریها طبق توزیع ارلانگی (با $r$ مرحله) و مدت زمان خدمت‌نمایی است. دراینجا نیزمی‌توان فرض کرد که زمان بین دوورود مشتریها به $r$ مرحلهٔ نمایی تقسیم می‌شود. به‌عبارت دیگر، می‌توان تصور کرد که مشتری قبل از ورود به‌سیستم، باید $r$ مرحلهٔ فرضی را در خارج ازسیستم بگذراند. وزمان گذرانیدن اولین مرحلهٔ آن بلافاصله پس ازورود مشتری قبلی به‌سیستم شروع می‌شود. بدیهی است که عملا



چنین حالتی وجود ندارد، ولی ازنظر ریاضی، گذرانیدن $r$ مرحلهٔ فرضی با توزیع $E_r$ تطبیق می‌کند. به‌این‌ترتیب، پس ازورود هرمشتری، با وجود اینکه هنوز ازمشتری بعدی خبری نیست، می‌توان تصور کرد که اولین مرحلهٔ ورود را شروع کرده است.

### تعریف حالت سیستم

تعداد مراحل ورودی که مشتریهای سیستم طی کرده‌اند را حالت می‌نامیم. هر مشتری داخل سیستم، در واقع تمام $r$ مرحله را طی کرده است. بدین‌ترتیب، اگر مشتری آینده، که به‌طور فرضی درحال گذرانیدن مراحل ورودی است، تاکنون از $m$ مرحله گذشته‌باشد و $n$ مشتری دیگر نیز داخل سیستم باشند، حالت سیستم به‌شرح زیر بیان می‌شود:

$$j = nr + m$$

باتعریف حالت سیستم به‌شرح‌فوق، نمودارآهنگ این مدل را می‌توان مطابق شکل (۸.۷) نشان داد.

$\pi'_j$ معرف‌احتمال بودن سیستم درحالت $j$، دردرازمدت است. لذا، معادلات تعادل این‌مدل به‌شرح زیراست

$$r\lambda\pi'_0 = \mu\pi'_r \qquad (۳۹.۷)$$

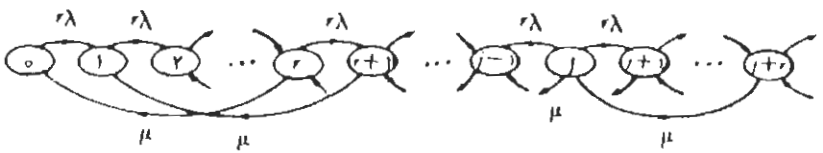
$$r\lambda\pi'_j = r\cdot\lambda\pi'_{j-1} + \mu\pi'_{j+r} \quad , \quad ۱ \leqslant j \leqslant r-۱ \qquad (۴۰.۷)$$

$$(r\lambda+\mu)\pi'_j = r\lambda\pi'_{j-1} + \mu\pi'_{j+r} \quad , \quad r \leqslant j \qquad (۴۱.۷)$$

همان طور که مشاهده می‌شود، ساختار این مدل با مدل $M/M/۱$ (خدمت‌گروهی که دقیقاً به $r$ مشتری خدمت‌می‌دهد) تطبیق می‌کند، با این تفاوت که دراین مدل همه جابه‌جای $\lambda$ پارامتر $r\lambda$ وجود دارد. برای محاسبهٔ معیارهای ارزیابی، دراینجا نیز ازمعادلهٔ مشخصهٔ سیستم، شبیه آنچه که درمدل $M/M/۱$ با خدمت‌گروهی ارائه شد، استفاده می‌شود. در این مدل، معادلهٔ مشخصه عبارت است از:

$$\mu x^{r+۱} - (r\lambda+\mu)x + r\lambda = ۰ \qquad (۴۲.۷)$$

دراینجا نیز، فقط یکی ازریشه‌های این معادله، که آن را $x_0$ می‌نامیم، عددی بین صفر و




**شکل ۸.۷** نمودار آهنگ مدل $E_r/M/۱$

یك است. $\pi'_0$ و $\pi_0$ نیز از رابطه‌های (۲۶.۷) و (۲۷.۷) و (۲۸.۷) به‌دست می‌آیند.

از آنجا که در این مدل نیز، هدف محاسبهٔ تابع توزیع، تعداد مشتریهای داخل سیستم (و نه تعداد مراحل کارهای انجام نشده) است، لذا $\pi_n$ را احتمال بودن $n$ مشتری در سیستم در درازمدت تعریف می‌کنیم. رابطه $\pi_n$ و $\pi'_n$ به‌شرح زیر است

$$\pi_n = \sum_{j=nr}^{(n+1)r-1} \pi'_j \ , \quad n = 0, 1, 2, \cdots \qquad (۲۳.۷)$$

بدین‌ترتیب، پس از محاسبه $\pi'_j$ با استفاده از معادلهٔ مشخصه، می‌توان $\pi_n$ را نیز از رابطهٔ فوق به‌دست آورد.

$$\pi_0 = \frac{1-x_0}{r} + \frac{1-x_0^2}{r} + \cdots + \frac{1-x_0^r}{r} \qquad (۲۴.۷)$$

طبق رابطهٔ (۲۸.۷)، به‌ازای $j \geqslant r$ و با جایگزینی $r\lambda$ به‌جای $\lambda$،

$$\pi'_j = \pi'_0 \frac{r\lambda}{\mu} x_0^{j-r}$$

در نتیجه، به‌ازای $n \geqslant r$ و با استفاده از رابطهٔ (۲۳.۷)،

$$\pi_n = \frac{\pi'_0 r\lambda}{\mu} [x_0^{-r} + x_0^{1-r} + \cdots + x_0^{-1}](x_0)^n = A(x_0)^n \qquad (۲۵.۷)$$

که

$$A = \frac{\pi'_0 r\lambda}{\mu} [x_0^{-r} + x_0^{1-r} + \cdots + x_0^{-1}] \qquad (۲۶.۷)$$

بنابراین، پس از حل معادلهٔ مشخصه، $\pi_n$ به‌سهولت قابل محاسبه است. برای محاسبهٔ $L$ از رابطهٔ زیر استفاده می‌شود:

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi_n = A\frac{x_0}{(1-x_0)^2} \qquad (۲۷.۷)$$

سایر معیارهای ارزیابی را نیز با استفاده از رابطه‌های لیتل به‌دست می‌آوریم.

**مثال ۹.۷** در یك مدل $E_2/M/1$ اگر $\lambda = 5$ و $\mu = 8$ باشد، معادلهٔ مشخصهٔ این مدل عبارت است از:

$$8x^3 - 18x + 10 = 0$$

تنها ریشهٔ بین صفر و یك معادلهٔ فوق عدد ۰٫۷۲۵ است؛ به‌این‌ترتیب،



$$\pi_0 = \pi'_0 + \pi'_1 = \frac{1-x_0}{2} + \frac{1-x_0^2}{2} = 0.375$$

و برای محاسبهٔ $\pi_n$، ابتدا از رابطهٔ (۲۶.۷) مقدار $A$ را محاسبه می‌کنیم:

$$A = \frac{1-x_0}{2} \cdot \frac{10}{8} [x_0^{-2} + x_0^{-1}] = 0.564$$

و

$$\pi_n = (0.564)(0.725^2)^n \quad , \quad n \geqslant 1$$

(همان‌طور که مشاهده می‌شود، مجموع $\pi_n$ برابر با یك است)

به‌همین ترتیب، از رابطهٔ (۲۷.۷) نتیجه می‌شود که:

$$L = \frac{0.564(0.725)^2}{[1-(0.725)^2]^2} = 1.31$$

و

$$W = \frac{L}{\lambda} = 0.263$$

و

$$L_q = L - \frac{\lambda}{\mu} = 0.692$$

و

$$W_q = W - \frac{1}{\mu} = 0.138$$

## ۶.۷ نظم اولویت

تا اینجا فرض بر این بود که نظم سیستم براساس نوبت (یا $FIFO$) است. به‌عبارت دیگر، هر مشتری که زودتر وارد شود، زودتر هم خدمت دریافت می‌کند. لیکن، در عمل نظمهای دیگری هم وجود دارد. در **نظم اولویت**، مشتریها از نظر اهمیت یکسان نیستند. اگر یك مشتری نسبت به مشتریهای دیگر اولویت داشته‌باشد، زودتر خدمت دریافت می‌دارد، حتی اگر دیرتر از آنان وارد سیستم شده‌باشد.

از نظر کلی، دو نوع نظم اولویت وجود دارد، که عبارت‌اند از: **نظم اولویت با حق انقطاع و اولویت بدون حق انقطاع.** در نظم اولویت با حق انقطاع، اگر مشتری با اولویت بالاتر وارد سیستم شود و خدمت‌دهنده مشغول ارائهٔ خدمت به مشتری با اولویت پایینتر باشد، خدمت دهنده موظف است کار خود را نیمه‌تمام گذارد و به مشتری با اولویت بالاتر خدمت ارائه کند. به‌این‌ترتیب، در این نظم حتی مشتریی که مشغول گرفتن خدمت است نیز، باید تا پایان دریافت خدمت توسط مشتری با اولویت بالاتر صبر کند. مثلاً، بیمارستان را می‌توان سیستمی با نظم اولویت و حق انقطاع تصور کرد. زیرا فرضاً، به‌بیماری که احتیاج به‌عمل جراحی فوری داشته باشد، خارج از نوبت رسیدگی می‌شود و حتی ممکن است پزشک، که مشغول معاینهٔ یك بیمار عادی است، نیز کارش را نیمه تمام بگذارد تا به‌این بیمار فوری بپردازد.

در نظم اولویت بدون حق انقطاع، اگر چه به‌مشتری با اولویت بالاتر زودتر خدمت ارائه می‌شود، این مشتری باید صبر کند تا خدمت‌دهنده کارش را تمام کند. به‌این‌ترتیب، در این نظم موقعی که ارائهٔ خدمت به‌یك مشتری شروع شود، به‌دلیل ورود یك مشتری با اولویت بالاتر، خدمت فعلی قطع نخواهد شد.

در نظم اولویت، بین مشتریهای یك گروه که دارای اولویت یکسان باشند، نوبت رعایت می‌شود. مطابق قرارداد، گروه ۱ در بالاترین اولویت قرار دارد، و پس از آن به‌ترتیب گروههای ۲ و ۳ هستند.

باید توجه داشت که در نظم اولویت، معیارهای کلی سیستم ثابت می‌ماند. وجود اولویت، چیزی را که تغییر می‌دهد، زمان انتظار مشتریهای گروههای مختلف است. به‌عبارت دیگر، اگر بدون در نظر گرفتن اولویت، میانگین زمان انتظار هر مشتری در سیستم $W$ باشد، با در نظر گرفتن اولویت، میانگین مدت انتظار هر مشتری بازهم $W$ خواهد بود؛ اما، مشتری دارای اولویت بالاتر، کمتر از $W$ و مشتری دارای اولویت پایینتر، بیشتر از $W$ در سیستم می‌ماند. در این قسمت، هدف تعیین مدت‌زمان انتظار مشتریهایی با اولویتهای گوناگون است.

برای بحث درمورد نتایج نظم اولویت، از قراردادهای زیر استفاده می‌کنیم:

$\lambda_i$ آهنگ ورود مشتری گروه $i$ و $\lambda=\sum_i \lambda_i$،

$W_{qi}$ و $W_i$، به‌ترتیب معرف میانگین زمان انتظار هر مشتری گروه $i$ در صف و سیستم؛ و $L_{qi}$ و $L_i$ به‌ترتیب معرف میانگین تعداد مشتریهای گروه $i$ در صف و سیستم است.

**قضیهٔ ۱۰.۷** یك مدل $M/M/m$ با $N$ گروه مشتری (از نظر اولویت) و بدون حق انقطاع را در نظر بگیرید. اگر نوع خدمت ارائه شده به‌همهٔ گروهها یکسان (با آهنگ $\mu$) باشد،

$$W_{qi}=\frac{1}{AB_{i-1}B_i}\quad,\quad i=1,\dots,N \tag{۴۸.۷}$$



که $A$ و $B_i$ به‌شرح زیر تعریف می‌شوند:

$$A=(m!)(m\mu-\lambda)\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^m\sum_{j=0}^{m-1}\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j}{j!}+m\mu \tag{۴۹.۷}$$

و

$$B_0=1 \tag{۵۰.۷}$$

و

$$B_i=1-\frac{\sum_{j=1}^{i}\lambda_j}{m\mu}\quad,\quad i=1,\dots,N \tag{۵۱.۷}$$

**حالت خاص.** در مدل $M/M/1$ رابطهٔ (۴۸.۷) به‌شکل روابط زیر ساده می‌شود:

$$W_{q1}=\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda_1)} \tag{۵۲.۷}$$

و

$$W_{qi}=\frac{\lambda}{(\mu-\lambda_1-\lambda_2-\dots-\lambda_{i-1})(\mu-\lambda_1-\dots-\lambda_i)}\quad,\quad i=2,\dots,N \tag{۵۳.۷}$$

پس از محاسبهٔ $W_{qi}$، سایر معیارهای ارزیابی از استنتاج لیتل به‌دست می‌آید. ضمناً بدیهی است که حالت تعادل موقعی وجود دارد که $\rho=\sum\lambda_i/m\mu<1$ باشد. اما اگر $\rho\to 1$، یعنی $\sum_{i=1}^{N}\lambda_i=m\mu$ باشد، فقط میانگین مدت زمان مشتریهای گروه $N$ (یعنی پایینترین اولویت) به‌بینهایت می‌رسد. از طرف دیگر، همان‌طور که مشاهده می‌شود، گروههایی با اولویت بالاتر، کمتر منتظر می‌مانند. روش کلی اثبات این قضیه، بعداً درهمین بخش ارائه می‌شود.

**مثال ۱۰.۷** تعداد دعاوی که به‌دادگاهی می‌رسد، براساس فرایند پواسون (با میانگین ماهی ۱۰ عدد) است. تنها قاضی این دادگاه می‌تواند به‌طور متوسط به ۱۲ پرونده در ماه رسیدگی کند. مدت‌زمان رسیدگی به‌هر پرونده نیز دارای توزیع نمایی فرض می‌شود. دعاوی از نظر این دادگاه بر سه نوع‌اند: اضطراری، مهم و عادی، که به‌ترتیب دارای اولویتهای ۱ و ۲ و ۳ هستند و مقدار آنها به‌طور متوسط به‌ترتیب ۱۰٪، ۲۰٪، و ۷۰٪ کل موارد دعاوی است. مدت زمانی که طول می‌کشد تا به‌یك پرونده رسیدگی شود، چقدر

است؟ تعداد پرونده‌های هر نوع ازدعاوی در دادگاه چقدر است؟

حل: دراین مدل $\mu = ۱۲$، $\lambda = ۱۰$، $\lambda_۱ = ۱$، $\lambda_۲ = ۲$، $\lambda_۳ = ۷$ و $\rho = ۱۰/۱۲$ است. اگر اولویت رعایت نمی‌شد، $W_q = ۵/۱۲$ و $L = ۵$ بود، اما با درنظر گرفتن اولویت و با استفاده از رابطه‌های (۵۱.۷) و (۵۲.۷) نتیجه می‌شود:

$$W_{q_۱} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda_۱)} = ۰٫۰۷۵ \text{ ماه}$$

$$W_{q_۲} = \frac{\lambda}{(\mu-\lambda_۱)(\mu-\lambda_۱-\lambda_۲)} = ۰٫۱ \text{ ماه}$$

و

$$W_{q_۳} = \frac{\lambda}{(\mu-\lambda_۱-\lambda_۲)(\mu-\lambda_۱-\lambda_۲-\lambda_۳)} = ۰٫۵۵۵$$

اما میانگین کل مدت انتظار مشتری درسیستم، با توجه به‌اینکه تعداد مشتریهای هر گروه یکسان نیست، ازرابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$W_q = \frac{\lambda_۱}{\lambda} W_{q_۱} + \frac{\lambda_۲}{\lambda} W_{q_۲} + \frac{\lambda_۳}{\lambda} W_{q_۳} = \frac{۵}{۱۲} \qquad (۵۳.۷)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، میانگین مدت‌زمان انتظار برای کل مشتریها تغییر نمی‌کند. اما

$$L_۱ = L_{q_۱} + \frac{\lambda_۱}{\mu} = \lambda_۱ W_{q_۱} + \frac{\lambda_۱}{\mu} = ۰٫۱۶$$

و

$$L_۲ = ۰٫۳۶۸ \qquad L_۳ = ۲٫۲۷۲$$

و

$$L = L_۱ + L_۲ + L_۳ = ۵$$

که دراین مورد نیز میانگین کل تعداد مشتریهای داخل سیستم تغییر نمی‌کند.

**مثال ۱۱.۷** مثال ۱۰.۷ را مجدداً درنظر بگیرید. اگر تعداد قاضی از یك نفر به‌دو نفر افزایش یابد، میانگین مدت‌زمان انتظار مشتریها چگونه تغییر خواهد کرد؟

حل: اگر در نظم اولویت، اولویت رعایت نشود، مدل حاصل یك مدل $M/M/۲$ خواهد بود. دراین‌صورت،



$$\pi_۰ = \frac{۱۴}{۳۲} \quad \text{و} \quad \rho = \frac{۱۰}{۲۲}$$

و طبق رابطهٔ (۴۷.۶)

$$L_q = ۰٫۱۷۵$$

و

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = ۰٫۰۱۷۵$$

اما براساس نظام اولویت، طبق روابط (۴۹.۷) و (۵۰.۷) و (۵۱.۷) داریم:

$$A = ۹۷٫۲$$

$$B_۰ = ۱, \qquad B_۱ = ۰٫۹۵۸, \qquad B_۲ = ۰٫۸۷۵, \qquad B_۳ = ۰٫۵۸۳$$

درنتیجه، از رابطهٔ (۴۸.۷)

$$W_{q_۱} = ۰٫۰۱۰۶$$

$$W_{q_۲} = ۰٫۰۱۲۲$$

$$W_{q_۳} = ۰٫۰۲$$

ومیانگین زمان انتظار کل مشتریها عبارت است از:

$$W_q = ۰٫۰۱۷۵$$

که با نتیجهٔ حاصل ازمدل، بدون درنظر گرفتن نظم اولویت، تطبیق می‌کند.

درسیستمی که‌در آن نظم‌اولویت رعایت می‌شود، ممکن است نوع خدمت موردنیاز مشتریهای گروههای مختلف نیزیکسان نباشد. فرض کنید $\mu_i$ معرف میانگین تعدادمشتریهای نوع $i$ است،که توسط یك خدمت دهنده، در زمان واحد خدمت دریافت می‌دارند. دراین صورت، نتایج یك نظم اولویت طبق قضیهٔ زیر بیان می‌شود.

**قضیهٔ ۲.۷** یك مدل $M/M/۱$ با $N$ گروه مشتری (از نظر اولویت) وبدون حق انقطاع را درنظر بگیرید. اگر آهنگ خدمت‌دهی به‌مشتریهای گروه $i$ برابر با $\mu_i$ باشد،

$$W_{q_i} = \frac{\sum_{j=1}^{N} \frac{\lambda_j}{\mu_j^۲}}{\left[۱ - \frac{\lambda_۱}{\mu_۱} - \dots - \frac{\lambda_{i-۱}}{\mu_{i-۱}}\right]\left[۱ - \frac{\lambda_۱}{\mu_۱} - \dots - \frac{\lambda_i}{\mu_i}\right]} \qquad (۵۵.۷)$$

(که $\lambda_0 = 0$ است)

(همان طور که مشاهده می‌شود، اگر $\mu = \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \cdots$ باشد، رابطهٔ فوق به روابط (۵۲.۷) و (۵۳.۷) تبدیل خواهد شد). روش کلی اثبات این قضیه بعداً ارائه می‌شود.

**مثال ۱۲.۷** مثال ۱۰.۷ را مجدداً درنظر بگیرید. فرض کنید که نوع خدمت گروههای مختلف با یکدیگر متفاوت باشد ($\mu_1 = 15$, $\mu_2 = 12$, $\mu_3 = 11$ است) دراین صورت میانگین مدت زمان انتظار هر گروه مشتری درصف را محاسبه کنید.

حل: ابتدا صورت کسر $W_{q_i}$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\lambda_j}{\mu_j^2} = \frac{1}{225} + \frac{2}{144} + \frac{7}{121} = 0.0762$$

درنتیجه،

$$W_{q_1} = \frac{0.0762}{1 - \frac{1}{15}} = 0.0816$$

$$W_{q_2} = \frac{0.0762}{\left(1 - \frac{1}{15}\right)\left(1 - \frac{1}{15} - \frac{2}{12}\right)} = 0.1065$$

$$W_{q_3} = \frac{0.0762}{\left(1 - \frac{1}{15} - \frac{2}{12}\right)\left(1 - \frac{1}{15} - \frac{2}{12} - \frac{7}{11}\right)} = 0.7626$$

## نظم اولویت با حق انقطاع

همان طور که گفتیم، دراین نظم تا زمانی که مشتریهای دارای اولویت بالاتر درسیستم هستند، از ارائهٔ خدمت به‌مشتریهای دارای اولویت پایینتر خودداری می‌شود. درچنین سیستمی، حتی اگرموقع ورود مشتری دارای اولویت بالاتر، خدمت‌دهنده درحال خدمت‌دهی به مشتری دارای اولویت پایینتر باشد، موظف است که کار خود را قطع کند و بلافاصله به مشتری دارای اولویت بالاتر خدمت ارائه کند. ادامهٔ خدمت قطع‌شده موقعی شروع می‌شود که دیگر مشتری دارای اولویت بالاتر درسیستم نباشد. بدین‌ترتیب، ارائهٔ خدمت به‌یک مشتری ممکن است چندبار قطع شود.

درنظم اولویت باحق انقطاع، می‌توان تصور کرد که‌سیستم برای خدمت به‌مشتریهای اولویت اول ایجاد شده است و فقط درمواقع بیکاری به‌مشتریهای گروههای بعدی خدمت داده می‌شود. به همین ترتیب، وجود مشتریهایی با اولویت شمارهٔ ۳ و ۴ و ... بر کار



مشتریهای دارای اولویت ۱ و ۲ هیچ اثری نخواهد داشت.

**قضیهٔ ۳.۷** یک مدل $M/M/1$ با $N$ گروه مشتری (ازنظر اولویت) وحق‌انقطاع را درنظر بگیرید. اگر نوع خدمت ارائه شده به‌همهٔ گروهها یکسان باشد،

$$W_1 = \frac{1}{\mu - \lambda_1} \qquad (56.7)$$

$$W_i = \frac{\mu}{(\mu - \lambda_1 - \cdots - \lambda_{i-1})(\mu - \lambda_1 - \cdots - \lambda_i)} \quad i = 2, \ldots, N \qquad (57.7)$$

**اثبات.** رابطهٔ (۵۶.۷) واضح است. زیرا دراین سیستم می‌توان تصور کرد که ارائهٔ خدمت فقط برای گروه ۱ است، مگر در وقت بیکاری که به سایر گروهها هم خدمت ارائه می‌شود. دراین صورت برای گروه ۱، یک مدل $M/M/1$ خواهیم داشت.

حال گروه ۱ و ۲ را با هم درنظر بگیریم. وجود گروههای دیگر هیچ تأثیری بر این دو گروه ندارد، لذا اگر میانگین مدت زمان انتظارمجموع مشتریهای ۱ و ۲ را با $W_{1,2}$ نشان دهیم، می‌توان با استفاده از مدل $M/M/1$ این مقدار را محاسبه کرد. لیکن باید درنظرداشت که آهنگ ورود مجموع مشتریهای ۱ و ۲ برابر با $\lambda_1 + \lambda_2$ است. لذا، طبق رابطهٔ (۲۱.۶)

$$W_{1,2} = \frac{1}{\mu - \lambda_1 - \lambda_2}$$

اما

$$W_{1,2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} W_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} W_2$$

با دانستن $W_1$ و $W_{1,2}$ می‌توان $W_2$ را محاسبه کرد. به‌همین ترتیب $W_3$ و... به‌دست می‌آید ورابطهٔ (۵۷.۷) حاصل می‌شود.

**مثال ۱۳.۷** مثال ۱۰.۷ را بافرض حق‌انقطاع مجدداً درنظر بگیرید. دراین صورت

$$W_1 = \frac{1}{12 - 1} = \frac{1}{11}$$

$$W_2 = \frac{12}{(12 - 1)(12 - 1 - 2)} = \frac{2}{33}$$

$$W_3 = \frac{12}{(12 - 1 - 2)(12 - 1 - 2 - 7)} = \frac{2}{3}$$

ومیانگین مدت‌زمان انتظار کل مشتریها برابر است با:

$$W=\frac{\lambda_1}{\lambda}W_1+\frac{\lambda_2}{\lambda}W_2+\frac{\lambda_3}{\lambda}W_3=\frac{1}{2}$$

می‌دانیم که بدون در نظر گرفتن اولویت نیز همین نتیجه برای کل سیستم به‌دست می‌آید. ضمناً $W_{01}$ و $W_{02}$ و $W_{03}$ را با استفاده از استنتاج لیتل می‌توان محاسبه کرد، که عبارت‌اند از: ۰٫۰۰۷۵، ۰٫۰۳۸ و ۰٫۵۸. همان طور که مشاهده می‌شود، در این حالت مدت‌زمان انتظار مشتریهای گروه ۱ و ۲ نسبت به نظم اولویت بدون حق انقطاع کمتر و درمورد مشتریهای گروه ۳ نسبت به این نظم بیشتر شده‌است. به‌عبارت دیگر، اگرچه زمان انتظار در کل سیستم تغییر نمی‌کند، نظم اولویت باحق انقطاع به‌نفع گروههای ۱ و ۲ و به‌زیان گروه ۳ تمام شده است.

حال همین مثال را برای $M/M/2$ درنظر بگیرید (که به‌جای یك قاضی دوقاضی در دادگاه کار کنند). همان طور که گفته شد، وجود گروههای ۲ و ۳ اثری بر گروه ۱ ندارد. و می‌توان تصور کرد که سیستم فقط به‌این گروه خدمت می‌دهد. لذا، درمورد گروه ۱، مدل $M/M/2$ با $\lambda=1$ و $\mu=12$ را خواهیم داشت. به این ترتیب $W_{01}$ محاسبه می‌شود. حال مجموع گروههای ۱ و ۲ را درنظر بگیرید. دراین‌حالت، می‌توان تصور کرد که گروه ۳ نقشی ندارد. لذا، $W_{01,02}$ ازمدل $M/M/2$ با آهنگ ورود $\lambda_1+\lambda_2$ محاسبه می‌شود وپس از آن $W_{02}$ ازرابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$W_{01,02}=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}W_{01}+\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}W_{02}$$

و به‌همین ترتیب $W_{03}$ محاسبه خواهد شد.

اگر فقط گروه یك درنظر گرفته شود، با استفاده ازمدل $M/M/2$ و با $\lambda=1$ و $\mu=12$ نتیجه می‌شود:

$$W_1=0.0835$$

اگر فقط گروههای یك و دو درنظر گرفته شود، با استفاده از مدل $M/M/2$ و با $\lambda=\lambda_1+\lambda_2=3$ و $\mu=12$ نتیجه می‌شود

$$W_{1,2}=0.0846$$

باتوجه به‌رابطهٔ

$$W_{1,2}=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}W_1+\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}W_2$$



نتیجه می‌شود:

$$W_2=0.08515$$

به‌همین ترتیب، اگرتمام گروهها درنظر گرفته شود،

$$W_{1,2,3}=0.1008$$

وبا توجه به‌رابطهٔ

$$W_{1,2,3}=\frac{\sum_{i=1}^{3}\lambda_i W_i}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}$$

نتیجه می‌شود:

$$W_3=0.1075$$

**اثبات قضیهٔ ۹.۷** اثبات این قضیه را فقط درساده‌ترین حالت آن درنظرمی‌گیریم، که مشتریها ازنظراولویت فقط به دوگروه تقسیم می‌شوند.

برای اینکه بتوانیم مسئله را درچارچوب یك فرایند مارکوف فورموله کنیم، حالت سیستم را به‌شرح زیر تعریف می‌کنیم.

حالت سیستم با سه حرف $(m\,n\,r)$ مشخص می‌گردد، که $m$ معرف تعداد مشتریهای نوع ۱ (با اولویت بالاتر) در سیستم، $n$ تعداد مشتریهای نوع ۲ (با اولویت پایینتر) در سیستم و $r$ نشاندهندهٔ شمارهٔ اولویت‌مشتری‌است، که درحال خدمت گرفتن‌است. مثلاً، حالت (۲و۸و۱۰) به‌معنای این است که ۱۰ مشتری بااولویت ۱و۸ مشتری بااولویت ۲ درسیستم هستند وضمناً یکی ازمشتریهای با اولویت ۲ در حال گرفتن خدمت است. بنابراین، ۱۰ مشتری‌نوع ۱و۷ مشتری‌نوع۲ درصف‌هستند. استثنائاً حالت‌صفر را بایك عددنشان‌می‌دهیم.

نمودار آهنگ این مدل درشکل ۹.۷ نشان داده شده است. براساس این نمودار آهنگ، معادلات تعادلی را به‌شرح زیرمی‌نویسیم:

$$\begin{cases}
\lambda\pi_0=\mu(\pi_{101}+\pi_{012}) \\
(\lambda+\mu)\pi_{101}=\lambda_1\pi_0+\mu(\pi_{201}+\pi_{112}) \\
(\lambda+\mu)\pi_{012}=\lambda_2\pi_0+\mu(\pi_{111}+\pi_{022}) \\
(\lambda+\mu)\pi_{m01}=\lambda_1\pi_{m-1,0,1}+\mu(\pi_{m+1,0,1}+\pi_{m12}) & , \quad m>1 \\
(\lambda+\mu)\pi_{0n2}=\lambda_2\pi_{0,n-1,2}+\mu(\pi_{101}+\pi_{0,n+1,2}) & , \quad n>1 \\
(\lambda+\mu)\pi_{1n1}=\lambda_2\pi_{1,n-1,1}+\mu(\pi_{201}+\pi_{1,n+1,2}) & , \quad n>1 \\
(\lambda+\mu)\pi_{m02}=\lambda_1\pi_{m-1,1,2} & , \quad m>1 \\
(\lambda+\mu)\pi_{mn1}=\lambda_1\pi_{m-1,n,1}+\lambda_2\pi_{m,n-1,1}+\mu(\pi_{m+1,n,1}+\pi_{m,n+1,2}) & , \quad m>1,\ n>0
\end{cases}$$

$\lambda_1 \quad \pi_{m-1,\, n-1,\, 1,2}$

$$(\lambda+\mu)\pi_{mn2}=\lambda_1\pi_{m-1,n,2}+\lambda_2\pi_{m,n-1,2}\quad,\quad m\geqslant 0,\ n\geqslant 1 \qquad (۵۸.۷)$$

ازطرف دیگر، احتمال بودن $n$ مشتری درسیستم ازرابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.

$$\pi_n=\sum_{m=0}^{n-1}(\pi_{n-m,m,1}+\pi_{m,n-m,2}) \qquad (۵۹.۷)$$

باتوجه به‌اینکه احتمال بودن $n$ مشتری درسیستم (صرف‌نظر از وابستگی به‌نوع اولویت آنها) بستگی به‌ضابطهٔ انتخاب‌مشتری ندارد، مقداراین‌احتمال برابر $\pi_n$ درمدل $M/M/1$ است، یعنی

$$\pi_n=(1-\rho)\rho^n \qquad (۶۰.۷)$$

به‌همین ترتیب، درصد مشغول‌بودن سیستم، صرف‌نظر ازاینکه خدمت‌دهنده به‌کدام گروه خدمت می‌دهد، برابر با $\rho$ است. از طرفی، درصدی از زمان‌که خدمت‌دهنده به مشتریهای نوع ۱ و ۲ خدمت می‌دهد، متناسب با تعداد مشتریهای نوع ۱ و ۲، یعنی $\lambda_1$ و $\lambda_2$ است، بنابراین

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\pi_{mn1}=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\rho=\frac{\lambda_1}{\mu} \qquad (۶۱.۷)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\pi_{mn2}=\frac{\lambda_2}{\mu} \qquad (۶۲.۷)$$

بااستفاده ازمعادلات تعادلی‌وروابط (۵۹.۷) تا (۶۲.۷) می‌توان نتایج کلی زیررا به‌دست آورد، که حالت خاص رابطه‌های (۵۲.۷) و (۵۳.۷) هستند.

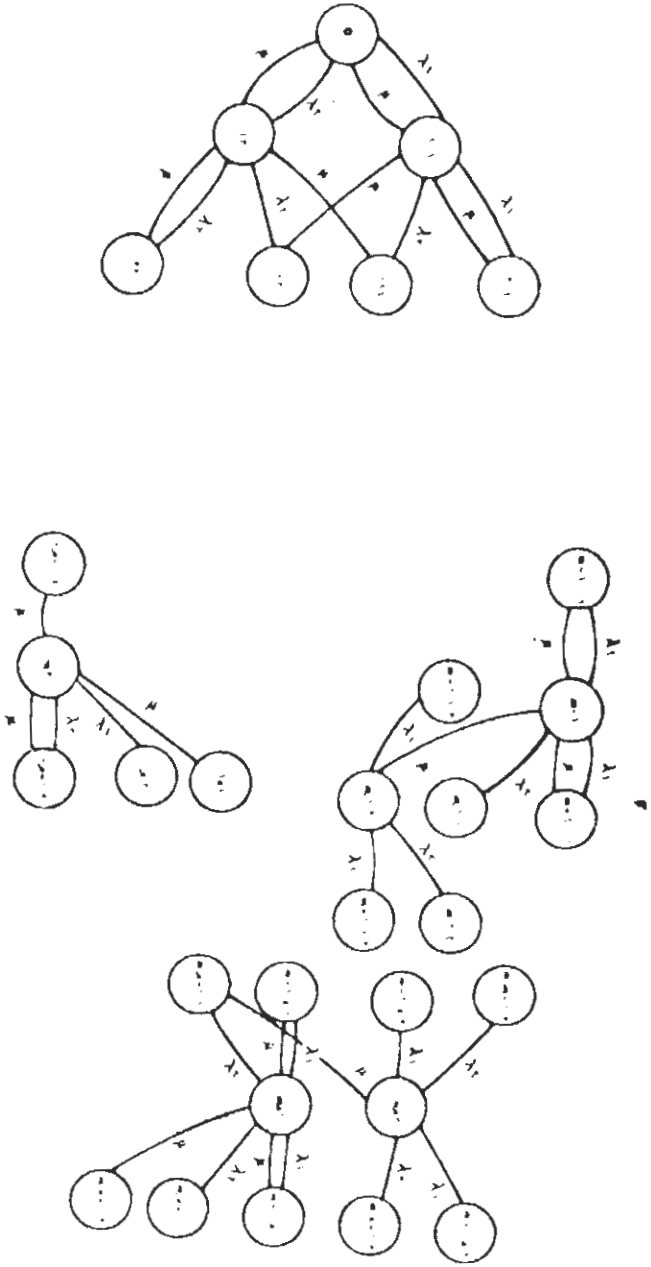
$$L_1=\frac{(\lambda_1/\mu)(1+\rho-\lambda_1/\mu)}{1-\lambda_1/\mu}$$

$$L_{q1}=\frac{\rho\lambda_1/\mu}{1-\lambda_1/\mu}$$

$$W_{q1}=\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda_1)}$$

$$L_2=\frac{(\lambda_2/\mu)(1-\lambda_1/\mu+\rho\lambda_1/\mu)}{(1-\rho)(1-\lambda_1/\mu)}$$

$$L_{q2}=\frac{\rho\lambda_2/\mu}{(1-\rho)(1-\lambda_1/\mu)}$$



شکل ۹.۷ نمودار آهنگ صف $M/M/1$ با دو گروه اولویت

$$W_{0\nu} = \frac{\lambda}{(\mu-\lambda)(\mu-\lambda_1)}$$

## ۷.۷ شبکه‌های صف

در سیستمهای صفی که در بحثهای قبل مورد بررسی قرار گرفتند، خدمت از یك مرحله تشکیل شده بود. به عبارت دیگر، در چنین سیستمهایی فقط یك نوع خدمت ارائه می‌شود و همه مشتریها برای دریافت آن مراجعه می‌کنند. درعمل، سیستمهایی دیگرهم وجود دارند که در آنها چند نوع خدمت عرضه می‌شود و هر مشتری برای دریافت تعدادی از آنها (ونه لزوما همهٔ آنها) مراجعه‌می‌کند. درواقع، این سیستمها را می‌توان مجموعهٔ چندسیستم فرعی فرض کرد، که هر کدام از آنها با داشتن تعدادی خدمت‌دهنده، مستقلا خدمت مشخصی را ارائه می‌دهد، ولی ازنظرورود مشتری، به‌یکدیگر وابسته هستند. دراین‌سیستمها، مجموعهٔ خدمت دهندگانی که یك نوع خدمت عرضه می‌کنند، را ایستگاه خدمت می‌نامند.

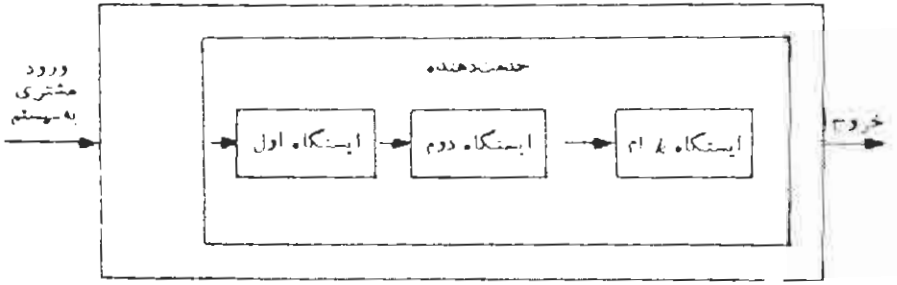
برای نمونه، تعمیرگاه‌اتومبیلی را در نظر بگیرید که‌در آن تعمیرکاران مختلف مشغول به‌کارهستند. دراین‌تعمیرگاه، هر گروه تعمیرکاررا، که وظیفه مشخصی (مثلا صافکاری، میزان فرمان، تنظیم موتور و...) را انجام می‌دهد، یك ایستگاه خدمت می‌گویند. در هر ایستگاه خدمت، یك یاچند خدمت‌دهنده (تعمیرکار) به‌طورموازی‌کارمی‌کنند. یك مشتری (اتومبیل) ممکن است فقط به‌یك نوع تعمیر (ایستگاه خدمت) نیازداشته باشد،ولی اتومبیلهایی هم به‌چندقسمت تعمیرگاه‌مراجعه می‌کنند. این‌اتومبیلها پس ازدریافت خدمت ازیك تعمیرکار، ازخدمت تعمیرکاران نوع دیگر هم استفاده می‌کنند. دراین تعمیرگاه، اگرچه هر گروه تعمیرکار (ایستگاه خدمت) ازنظر ارائهٔ خدمت مستقل است، اما با توجه به‌اینکه مراجعین آنها ممکن است خروجیهای سایر ایستگاههای خدمت باشند، لذا نمی‌توان هر ایستگاه خدمت را یك سیستم صف مستقل وجدا ازسایرایستگاهها تلقی کرد.

دراین بخش، حالت خاصی ازشبکه‌های صف مورد بررسی قرارمی‌گیرد، که ورود مشتریها به‌آن طبق فرایند پواسون ومدت‌زمان دریافت هرنوع خدمت، نمایی است.

### شبکه‌های سری

دراین سیستمها، تعدادی ایستگاه خدمت به طور سری قرار گرفته‌اند. هر مشتری ابتدا به‌ایستگاه شمارهٔ یك مراجعه وپس ازدریافت خدمت به‌ایستگاه‌دوم و به‌همین‌ترتیب به‌سایر ایستگاهها مراجعه می‌کند. همان‌طور که در شکل ۱۰.۷ مشاهده می‌شود خدمت‌دهنده، در واقع مجموع ایستگاههای خدمت است. ورود مشتریها به سیستم طبق فرایند پواسون با پارامتر $\lambda$ ومدت‌زمان خدمت درهر ایستگاه نمایی فرض می‌شود. درایستگاه شماره $i$، (به‌ازای $i=1,2,\dots,K$)، تعداد خدمت‌دهنده $m_i$ ومیانگین مدت‌زمان خدمت $1/\mu_i$ است. در یك سیستم سری، همهٔ مشتریها متقاضی هر $K$ نوع خدمت هستند و ضمناً ترتیب






**شکل ۱۰.۷** یك سیستم صف با خدمت‌دهنده‌های سری

دریافت خدمت نیز برای همه یکسان است. به‌این ترتیب، مشتری پس ازورود به‌سیستم در صف ایستگاه اولی منتظر می‌ماند. پس از دریافت خدمت درایستگاه اول، به‌صف دومین ایستگاه می‌پیوندد. بالاخره پس ازدریافت خدمت از $K$ امین ایستگاه هم از سیستم خارج می‌شود.

یك خط تولید را درنظر بگیرید. هرقطعه، ایستگاههای مختلف کار را طی می‌کند تا ازخط خارج شود. البته بدیهی است که درخطوط تولید مدت‌زمان دریافت خدمت لزوما نمایی نیست.

ظرفیت صف درایستگاههای مختلف می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد. ابتدا حالتی را بررسی می‌کنیم که ظرفیت صف درهمه‌ایستگاهها نامتناهی باشد. درچنین حالتی، و با استفاده ازفضاهای زیرنشان داده‌می‌شود که هرایستگاه‌خدمت را می‌توان یك مدل‌نمایی $M/M/m$ فرض کرد، که ورود مشتریها به‌آن طبق فرایند پواسون با پارامتر $\lambda$ است.

قبل ازبحث دربارهٔ رابطه بین ایستگاههای خدمت در یك شبکهٔ سری، ابتدا لازم است تابع‌توزیع زمان‌بین دوخروج متوالی مشتریهای یك سیستم مورد بررسی قرار گیرد.

**قضیهٔ ۴.۷** دریك سیستم صف، اگر $\rho<1$ باشد، آهنگ خروج مشتریها برابر با آهنگ ورود آن و اگر $\rho\geq 1$ باشد، آهنگ خروج برابر با مجموع آهنگ خدمت مشتریهاست.

درقضیهٔ فوق‌باید درنظر داشت که اگر $\rho\geq 1$ باشد، بدیهی است که خدمت‌دهندگان، دائماً مشغول خدمت هستند و درنتیجه آهنگ خروج برابر با ظرفیت کل خدمت‌دهندگان، یعنی $m\mu$ است. اما اگر $\rho<1$ باشد، طبیعتاً خدمت‌دهندگان به‌طور متوسط $(\rho)$ درصد اوقات مشغول ارائهٔ خدمت هستند و آهنگ خروج، کمتر ازظرفیت آنها، و برابربا آهنگ ورود مشتریهاست.

**مثال ۱۴.۷** یك مدل $M/M/2$ را درنظر بگیرید، که هرساعت به‌طور متوسط ۳۰ مشتری وارد می‌شوند. مدت زمان خدمت، نمایی با میانگین ۳ دقیقه است. درنتیجه، هرخدمت‌دهنده می‌تواند به‌۲۰ مشتری و کل سیستم به‌۴۰ مشتری درساعت خدمت

ارائه کند. اما چون تعداد مشتریهایی که مراجعه می‌کنند، کمتر از این تعداد است، لذا در هر ساعت به‌طور متوسط فقط ۳۰ مشتری خدمت دریافت و از سیستم خارج می‌شوند. در این مثال، اگر آهنگ ورود مشتریها از ۳۰ به ۵۰ تغییر کند، $\rho > 1$، و ظرفیت خدمت‌دهندگان کمتر از میزانی است که بتوانند تقاضای مشتریان را تأمین کنند و لذا طول صف مرتب افزایش می‌یابد و به‌بینهایت می‌رسد. بدین‌ترتیب، خدمت دهندگان همواره باید کار کنند و در نتیجه آهنگ خروج برابر با ۴۰ خواهد بود.

با استفاده از قضیهٔ زیر، نشان داده می‌شود که در مدلهای نمایی نه تنها آهنگ خروج برابر با آهنگ ورود مشتریهاست، بلکه تابع توزیع زمان بین دو خروج متوالی مشتریها نیز با تابع توزیع زمان بین دو ورود آنها یکسان است (به‌شرط اینکه $\rho < 1$ و ظرفیت صف نامتناهی باشد).

**قضیهٔ ۵.۷** در یک مدل $M/M/1$ با $\rho < 1$ و بدون تناهی در ظرفیت صف، زمان بین دو خروج متوالی مشتریها، متغیر تصادفی نمایی با پارامتر $\lambda$ (آهنگ ورود مشتریها) است.

اثبات. یک لحظهٔ مشخص را، که یک مشتری از سیستم خارج می‌شود، در نظر بگیرید. زمان بین دو خروج متوالی مشتریها، در واقع مدت زمانی است که طول می‌کشد تا مشتری بعدی از سیستم خارج شود. این متغیر تصادفی را با $E$ نشان می‌دهیم و هدف محاسبه $P(E>t)$ است. حال فرض کنید که در لحظهٔ خروج مشتری مورد نظر، تعداد مشتری در سیستم برابر با $N$ باشد. در این صورت،

$$P(E>t)=P(E>t|N=0)P(N=0)+P(E>t|N>0)P(N>0) \qquad (۶۳.۷)$$

با استفاده از روابط موجود در مدل $M/M/1$ داریم:

$$P(N>0)=\rho \quad , \quad P(N=0)=\pi_0=1-\rho \qquad (۶۴.۷)$$

از طرف دیگر، اگر در لحظهٔ مورد نظر، تعدادی مشتری دیگر هم در سیستم باشند، مدت زمان $E$، یا مدت زمانی که طول می‌کشد تا مشتری بعدی از سیستم خارج شود، برابر با مدت زمان دریافت خدمت (یا $X$) توسط مشتری بعدی است. لذا،

$$P(E>t|N>0)=P(X>t)=e^{-\mu t} \qquad (۶۵.۷)$$

اما، چنانچه در لحظهٔ خروج مشتری مورد نظر، هیچ مشتری دیگری در سیستم نباشد، مدت زمانی که طول می‌کشد تا مشتری بعدی خارج شود، برابر با مجموع مدت زمانی که طول می‌کشد تا اولین مشتری وارد سیستم شود (یعنی $T$) و مدت زمان دریافت خدمت توسط همین مشتری (یعنی $X$) است. لذا



$$P(E>t|N=0)=P(T+X>t)=\frac{\mu e^{-\lambda t}-\lambda e^{-\mu t}}{\mu-\lambda} \qquad (۶۶.۷)$$

(اثبات رابطهٔ فوق در مسئلهٔ شمارهٔ ۲۹ فصل ۳ خواسته شده است)

پس از جایگزین کردن روابط (۶۴.۷) و (۶۵.۷) و (۶۶.۷) در رابطهٔ (۶۳.۷) نتیجه می‌شود که،

$$P(E>t)=e^{-\lambda t}$$

قضیهٔ فوق در مورد مدلهای $M/M/m$ نیز صادق است. قضیهٔ زیر، بدون اینکه اثبات آن ارائه شود، این موضوع را بیان می‌کند

**قضیهٔ ۶.۷** در یک مدل $M/M/m$، با $\rho < 1$ و بدون متناهی بودن ظرفیت، زمان بین دو خروج متوالی مشتریها متغیر تصادفی نمایی با پارامتر $\lambda$ (آهنگ ورود مشتریها) است

با استفاده از قضیهٔ زیر، شبکه‌های سری را می‌توان تحلیل کرد.

**قضیهٔ ۷.۷** یک سیستم سری با $K$ ایستگاه خدمت را در نظر بگیرید. ورود مشتریها به‌سیستم (یا ورود مشتریها به‌ایستگاه اول) براساس فرایند پواسون (با پارامتر $\lambda$) و مدت زمان خدمت در هر ایستگاه، نمایی فرض می‌شود. در هر ایستگاه تعدادی خدمت‌دهنده مشغول خدمت هستند. در این صورت، هر ایستگاه خدمت را می‌توان یک مدل مستقل $M/M/m$ تصور کرد، که آهنگ ورود به‌آن همان آهنگ ورود مشتریها به‌سیستم ($\lambda$) است، مشروط بر اینکه در همه ایستگاهها ظرفیت صف نامتناهی، و مجموع آهنگ خدمت دهی خدمت دهندگان آن ایستگاه از $\lambda$ بیشتر باشد.

اثبات: در مورد اولین ایستگاه موضوع روشن است. طبق قضیهٔ ۴.۷، مشتریها طبق فرایند پواسون با آهنگ $\lambda$ از ایستگاه اول خارج و به ایستگاه دوم وارد می‌شوند. لذا، ایستگاه دوم نیز یک مدل $M/M/m$ با آهنگ ورود $\lambda$ است. به‌همین‌ترتیب، بقیهٔ ایستگاهها را نیز می‌توان سیستمهای مستقل $M/M/m$ تصور کرد.

با استفاده از قضیهٔ ۷.۷ و با توجه به‌اینکه می‌توان ایستگاههای خدمت را مستقل فرض کرد، محاسبهٔ معیارهای ارزیابی سیستم سری به سهولت انجام می‌شود. به عبارت دیگر، اگر $\pi_{n_1,n_2,\dots,n_k}$ معرف احتمال بودن $n_1$ مشتری در مرحلهٔ اول، $n_2$ مشتری در مرحله دوم و $n_k$ مشتری در مرحله $n$ ام باشد،

$$\pi_{n_1,n_2,\dots,n_k}=(\pi^{(1)}_{n_1})(\pi^{(2)}_{n_2})\dots(\pi^{k}_{n_k}) \qquad (۶۷.۷)$$

که $\pi^{(i)}_{n_i}$ معرف احتمال بودن $n_i$ مشتری در ایستگاه $i$ ام است.

به‌همین‌ترتیب،

$$L = L_1 + L_2 + \cdots + L_k \qquad (۶۸.۷)$$

که $L_i$ میانگین تعداد مشتریهایی است که درمرحلهٔ $i$ درحال دریافت خدمت هستند، و براساس روابط مدل $M/M/m$ قابل محاسبه است. درمورد سایر معیارهای ارزیابی نیز به‌همین ترتیب عمل می‌شود

**مثال ۱۵.۷** در یك تعمیرگاه، تعمیر یك ماشین از سه مرحله تشکیل می‌شود. مرحلهٔ اول پیاده کردن ماشین، مرحلهٔ دوم تشخیص و رفع عیب ومرحلهٔ سوم سوار کردن ماشین است. مدت‌زمان لازم برای اجرای هر مرحله، متغیر تصادفی نمایی است، ومیانگین آنها به‌ترتیب ۲ و ۴ و ۱ روزاست. تقاضا برای تعمیر ماشین براساس فرایند پواسون است و به‌طور متوسط هر ۱۰ روز یك ماشین برای تعمیر به‌این تعمیرگاه می‌رسد. درمرحلهٔ سوم دو تعمیرکار کار می‌کنند، ولی در مراحل اول ودوم فقط یك تعمیرکارمشغول است. احتمال اینکه دریك لحظه فقط مرحلهٔ دوم دارای مشتری باشد، چیست؟ احتمال اینکه دومشتری در سیستم باشد، چیست؟ میانگین مدت‌زمان انتظار هرمشتری درسیستم چقدراست؟

حل: این مدل یك سیستم سری با سه ایستگاه خدمت است، که در آن

$$m_3 = 2,\quad m_1 = m_2 = 1,\quad \mu_2 = \frac{1}{4},\quad \mu_1 = \frac{1}{2},\quad \lambda = \frac{1}{10}$$

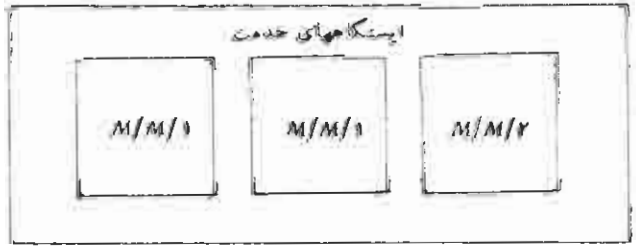
است (شکل ۱۱.۷). درهرسه ایستگاه $\rho_i < 1$ است.

احتمال اینکه در یك لحظه فقط مرحلهٔ دوم دارای مشتری باشد، برابر است با اینکه مراحل اول وسوم مستقلاً فاقد مشتری ومرحلهٔ دوم دارای مشتری باشد، یعنی به‌ازای $n > 0$

$$\pi_{0,n,0} = (1-\rho_1)(\rho_2)(\pi_n^{(3)}) = (0.8)(0.4)\begin{matrix}0.95\\1.05\end{matrix} = 0.29$$

احتمال اینکه دونفر مشتری درسیستم باشند، برابر با $\pi_{n_1,n_2,n_3}$ است، به‌شرط اینکه، $n_1+n_2+n_3 = 2$. بدین‌ترتیب، این احتمال برابراست با

$$\pi_{2,0,0}+\pi_{1,1,0}+\pi_{1,0,1}+\pi_{0,0,2}+\pi_{0,2,0}+\pi_{0,1,1} = 0.15$$




**شکل ۱۱.۷** سیستم سری مربوط به مثال



ومیانگین زمان انتظار درسیستم برابراست با:

$$W = W_1 + W_2 + W_3 = 17.3 \text{ روز}$$

باید توجه داشت که درشبکه‌های سری، اگرچه برای محاسبهٔ معیارهای ارزیابی سیستم می‌توان ایستگاههای خدمت را مستقل فرض کرد، ولی این موضوع به‌معنای آن نیست که مدت‌زمان انتظار یك مشتری مشخص دریك ایستگاه مستقل از مدت‌زمان انتظار او درسایر ایستگاهها باشد. مسئلهٔ ۳۰ آخر همین فصل، این موضوع را نشان می‌دهد. لیکن، برای مشتریها به‌طور متوسط (و نه برای هرمشتری مشخص) معیارهای ارزیابی را می‌توان براساس استقلال ایستگاهها به‌دست آورد.

## سیستمهای سری با ظرفیت متناهی صف

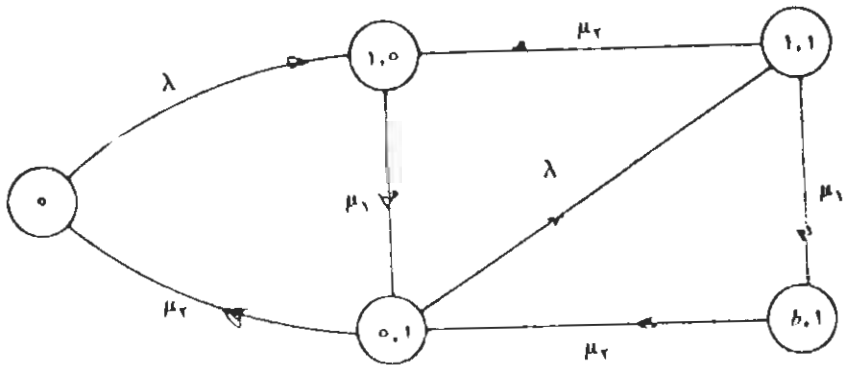
حال فرض کنید که ظرفیت صف در بعضی از ایستگاههای خدمت متناهی باشد. به‌عنوان نمونه، یك ایستگاه را درنظر بگیرید که ظرفیت صف در آن برابر با صفر (یا هرعدد دیگر) باشد. دراین صورت، امکان دارد که یك مشتری پس ازدریافت خدمت ازمرحلهٔ قبلی وارد این ایستگاه شود ومواجه با تکمیل بودن ظرفیت این ایستگاه گردد. درچنین حالتی دواتفاق می‌تواند بیفتد.

۱. این مشتری ازسیستم خارج شود و خدمتی را که درایستگاههای بعدی ارائه می‌شود، ازسیستمهای دیگری دریافت کند. دراین حالت، فرض می‌شود که این مشتری دیگر به‌این سیستم برنمی‌گردد.

۲. این مشتری درایستگاه قبلی منتظر بماند. دراین حالت، خدمت دهندهٔ ایستگاه قبلی اجباراً ازادامهٔ خدمت به مشتریهای دیگر باز می‌ماند؛ زیرا، فضا ویا امکانات ارائهٔ خدمت توسط این مشتری اشغال شده‌است.

**مثال ۱۶.۷** سیستم صفی را درنظر بگیرید که از دوایستگاه خدمت به‌طور سری تشکیل شده است. ظرفیت صف درهردوایستگاه برابر با صفراست. ورود مشتریها به‌سیستم براساس فرایند پواسون با پارامتر $\lambda$ و زمان خدمت درهرایستگاه دارای توزیع نمایی با پارامترهای $\mu_1$ و $\mu_2$ فرض می‌شود. چنانچه مشتری پس‌ازپایان‌دریافت خدمت ازایستگاه اول، به‌علت پربودن ایستگاه دوم نتواند وارد آن ایستگاه شود، اجبار دارد که درهمان ایستگاه اول منتظر بماند. دراین سیستم حالتهای مختلف عبارت‌اند از:

۱. $(0)$ هردو ایستگاه خالی است.
۲. $(1, 0)$ ایستگاه اول دارای مشتری وایستگاه دوم خالی است.
۳. $(0, 1)$ ایستگاه اول خالی و ایستگاه دوم دارای مشتری است.
۴. $(1, 1)$ در هردو ایستگاه یك مشتری درحال دریافت خدمت است.
۵. $(b, 1)$ درایستگاه اول مشتری خدمت را دریافت داشته و منتظراست که ایستگاه




**شکل ۱۲.۷** نمودار آهنگ مثال ۱۶.۷

دوم خالی شود و یك مشتری هم در ایستگاه دوم مشغول دریافت خدمت است.

باید توجه داشت که حالتهای شمارهٔ ۴ و ۵ با یکدیگر متفاوت‌اند، اگرچه در هر دو حالت دو مشتری، هر مشتری در یك ایستگاه، وجود دارد. نمودار آهنگ این مدل در شکل ۱۲.۷ نشان داده شده است. معادلات تعادلی در این سیستم به‌شرح زیرند.

$$\lambda\pi_{0} = \mu_2\pi_{0,1}$$

$$\mu_1\pi_{1,0} = \lambda\pi_{0} + \mu_2\pi_{11}$$

$$(\lambda+\mu_2)\pi_{0,1} = \mu_1\pi_{1,0} + \mu_2\pi_{0,1}$$

$$(\mu_2+\mu_1)\pi_{11} = \lambda\pi_{0,1}$$

$$\mu_2\pi_{0,1} = \mu_1\pi_{1,1}$$

پس از حل دستگاه معادلات فوق، محاسبهٔ معیارهای ارزیابی سیستم ممکن می‌شود.

$$\pi_{0} = \left[1 + \frac{\lambda}{\mu_1} + \frac{\lambda}{\mu_2} + \frac{\lambda^2}{\mu_1\mu_2} + \frac{\mu_1\lambda^2}{\mu_2^2(\mu_1+\mu_2)}\right]^{-1}$$

### شبکه‌های صف در حالت کلی

در یك شبکهٔ صف، که لزوماً یك سیستم سری نیست، فرض می‌شود که $K$ ایستگاه خدمت وجود دارد. مشتری نیاز به خدمات بعضی از ایستگاهها دارد و ضمناً ترتیب مراجعهٔ او نیز از قبل مشخص نیست. بدین‌ترتیب، مشتری وقتی وارد سیستم می‌شود، برای اولین بار ممکن است به هر کدام از ایستگاههای خدمت مراجعه کند. پس از دریافت خدمت از این ایستگاه، به‌هر کدام از ایستگاههای دیگر می‌تواند وارد شود. بدین‌ترتیب، مشتریهای هر



ایستگاه یا مستقیماً از خارج وارد می‌شوند یا از ایستگاههای دیگر مراجعه می‌کنند. شبکه‌های صف بسیار متنوع هستند و حل اکثر آنها، با روشهای تحلیلی ممکن نیست. حالت خاصی که **شبکه‌های جاکسون** نامیده می‌شود، براساس مفروضات زیر است.

### مفروضات شبکه‌های صف جاکسون

الف. ورود مشتریها از خارج سیستم به‌ایستگاه خدمت شمارهٔ $j$ طبق فرایند پواسون با آهنگ $\lambda'_j$ (به‌ازای $j = 1, 2, \ldots, K$) است.

ب. مدت‌زمان خدمت در ایستگاه شمارهٔ $j$، متغیری تصادفی و نمایی با پارامتر $\mu_j$ و مستقل از مدت خدمت در سایر ایستگاهها فرض می‌شود.

ج. ظرفیت صف در همهٔ ایستگاهها نامتناهی است.

د. یك مشتری که از ایستگاه $i$ خارج می‌شود، به‌احتمال $p_{ij}$ برای دریافت خدمت به‌ایستگاه $j$ مراجعه می‌کند. احتمال اینکه مشتری پس از دریافت خدمت از ایستگاه $i$، از سیستم خارج شود را با $p_{i0}$ نشان می‌دهند.

**حالت خاص** سیستم سری یك حالت خاص از شبکه‌های جاکسون فرض می‌شود، که در آن

$$p_{10} = 1, \quad p_{i,i+1} = 1, \quad (j = 1, 2, \ldots, K \text{ به‌ازای}) \quad \lambda'_j = 0, \quad \lambda'_1 = \lambda$$

### آهنگ ورود مشتریان به‌هر ایستگاه

همان‌طور که گفته شد، ورودیهای هر ایستگاه بر دو نوع‌اند، یا از خارج سیستم و یا از سایر ایستگاهها. بنابراین، اگر $\lambda_j$ معرف **آهنگ ورود مشتریها به‌ایستگاه** $j$ ام باشد،

$$\lambda_j = \lambda'_j + \sum_{i=1}^{K} \lambda_i p_{ij}, \quad j = 1, 2, \ldots, K \qquad (۶۹.۷)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، $\lambda_i P_{ij}$ آهنگ مشتریهایی است که پس از دریافت خدمت در ایستگاه $i$ ام به ایستگاه $j$ مراجعه می‌کنند.

### بازخورد

در حالت کلی، یك مشتری پس از دریافت خدمت در ایستگاه $j$ ام، ممکن است بازهم به‌همین ایستگاه برگردد، تا مجدداً خدمت دریافت کند. به‌این حالت بازخورد می‌گویند. بازخورد می‌تواند بلافاصله باشد، یعنی $p_{jj} > 0$ و یا مشتری پس از مراجعه به‌ایستگاههای مختلف مجدداً به‌ایستگاه $j$ برگردد.

برای نمونه یك قطعه، در خط تولید، ممکن است پس از گذرانیدن یك ایستگاه،

به علت عدم تطابق با استانداردهای کنترل کیفیت، مجدداً به همان ایستگاه برای اصلاح فرستاده شود.

**قضیهٔ ۸.۷** در یک شبکه صف با مفروضات فوق، اگر تمام حالتها بدون بازخورد باشند، ورودی تمام ایستگاهها براساس فرایند پواسون است.

بدین‌ترتیب، در یک شبکه صف با مفروضات فوق و بدون بازخورد، هر ایستگاه مستقل (به صورت یک مدل نمایی عمل می‌کند.

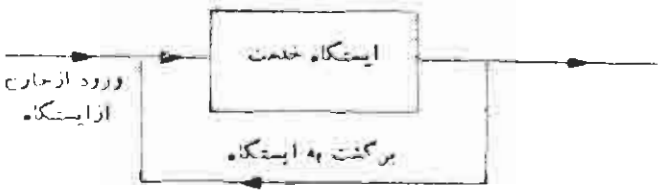
اما چنانچه یک ایستگاه خدمت دارای بازخورد (اعم از مستقیم یا غیر مستقیم) باشد، ورودی کلی به آن ایستگاه، دیگر طبق فرایند پواسون نخواهد بود. درشکل ۱۳.۷، چنین ایستگاهی نشان داده شده است. مشتریهایی که برای دریافت خدمت مراجعه می‌کنند، بر دو نوع‌اند. تعدادی از آنها از خارج سیستم وارد می‌شوند و تعدادی از آنها هم‌مشتریهای قبلی ایستگاه هستند، که برای دریافت خدمت مجدد به‌ایستگاه برمی‌گردند. دراین ایستگاه، حتی اگر تعداد مشتریهایی که از خارج سیستم مراجعه می‌کنند، بر اساس فرایند پواسون باشد، چون مشتریهای بازخوردی، فرایند پواسون تشکیل نمی‌دهند، لذا کل ورودی سیستم لزوماً طبق فرایند پواسون نیست.

نکته جالب توجه این است که حتی درمورد سیستمهایی که بازخورد دارند، اگرچه ورودی ایستگاهها دیگر نمی‌توانند براساس فرایند پواسون باشد و نتیجتاً هر ایستگاه طبق مدلی نمایی عمل نمی‌کند، ولی با استفاده از قضیهٔ زیر، روابطی به‌دست می‌آید که می‌توان نظیر مدلهای مستقل با آنها برخورد کرد.

**قضیهٔ ۹.۷** یک شبکهٔ صف با مفروضات فوق (با بازخورد و یا بدون بازخورد) را، که درهمهٔ ایستگاههای آن $\rho<1$ و ظرفیت صف نامتناهی است، درنظر بگیرید. دراین‌صورت، دردرازمدت رابطهٔ زیر همیشه برقرار است:

$$\pi_{n_1,n_2,\dots,n_K}=\left(\sum_{j=1}^{K}\pi_{n_j}^{(j)}\right)\prod_{j=1}^{K}\pi_{n_j}^{(j)}$$

که $\pi_{n_j}^{(j)}$ معرف احتمال بودن $n_j$ مشتری درایستگاه $j$ و $\pi_{n_1,n_2,\dots,n_K}$ معرف بودن $n_1$




**شکل ۱۳.۷** ایستگاه خدمت با بازخورد



مشتری در ایستگاه اول، $n_2$ مشتری درایستگاه دوم و ... $n_K$ مشتری درایستگاه $K$ ام است.

همان‌طور که مشاهده می‌شود، با وجود اینکه ایستگاهها، سیستمهای نمایی نیستند، برای محاسبهٔ تابع توزیع تعداد مشتریان، می‌توان سیستم را دارای $K$ مدل نمایی مستقل فرض کرد. به‌همین‌ترتیب،

$$L=L_1+L_2+\dots+L_K$$

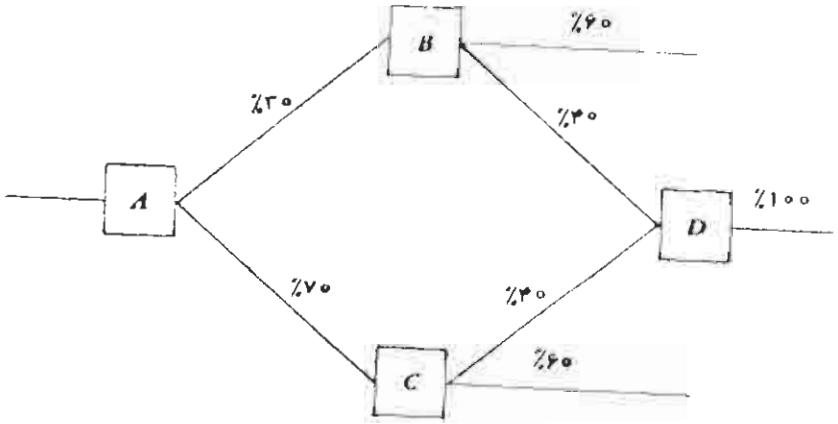
که $L_i$ معرف میانگین تعداد مشتری درایستگاه $i$ ام است.

**مثال ۱۷.۷** دریک درمانگاه، بیماران ابتدا برای ثبت‌نام و تکمیل پرونده به‌قسمت $A$ مراجعه می‌کنند. این درمانگاه دارای سه پزشک $B$ و $C$ و $D$ است. ۳۰ درصد بیماران به پزشک $B$ و ۷۰ درصد بقیه به $C$ مراجعه می‌کنند. هر کدام از این دو پزشک نیز ۴۰درصد بیماران خود را برای تکمیل معاینات به پزشک $D$ ارجاع می‌دهند. تعداد بیمارانی که به این درمانگاه مراجعه می‌کنند، فرایندی پواسون با میانگین ساعتی ۱۶ بیمار است. مدت‌زمان ثبت‌نام و تکمیل پرونده وهمچنین معاینهٔ بیماران، متغیرهای تصادفی نمایی بامیانگین به‌ترتیب ۳، ۷٫۵ و ۳٫۷۵ و ۷٫۵ دقیقه است. مدت‌زمان انتظار هرمشتری درسیستم چقدر است؟

حل: این سیستم صف یک شبکهٔ جاکسون و بدون بازخورد است. این شبکه را به‌صورت زیر می‌توان نشان داد (شکل ۱۴.۷).

دراین مدل،

$$p_{B0}=0.6,\ p_{BD}=0.4,\ p_{AC}=0.7,\ p_{AB}=0.3,\ \lambda_B'=\lambda_C'=\lambda_D'=0,$$




**شکل ۱۴.۷** شبکهٔ مثال ۱۷.۷

$$\lambda'_A = ۱۶,\ \mu_۴ = ۸,\ \mu_۳ = ۱۶,\ \mu_۲ = ۸,\ \mu_۱ = ۲۰,\ p_{D۰} = ۱,\ p_{C۰} = ۰٫۶,$$

$$p_{CD} = ۰٫۴,$$

دراین مدل چون هیچ کدام از ایستگاهها بازخورد ندارند، لذا ورودی آنها طبق فرایند پواسون است، ضمناً

$$\lambda_A = ۱۶$$

$$\lambda_B = (۰٫۳)(۱۶) = ۴٫۸$$

$$\lambda_C = (۰٫۷)(۱۶) = ۱۱٫۲$$

$$\lambda_D = (۰٫۴)(۴٫۸) + (۰٫۴)(۱۱٫۲) = ۶٫۴$$

$$\rho_A = \frac{\lambda_A}{\mu_A} = \frac{۱۶}{۲۰} = ۰٫۸, \qquad \rho_B = ۰٫۶,\ \rho_C = ۰٫۷,\ \rho_D = ۰٫۸$$

اگر $\pi_0^{(i)}$ را معرف احتمال خالی بودن ایستگاه $i$ بگیریم، خواهیم داشت:

$$\pi_0^{(۴)} = ۰٫۲,\ \pi_0^{(۳)} = ۰٫۳,\ \pi_0^{(۲)} = ۰٫۴,\ \pi_0^{(۱)} = ۰٫۲$$

هر ایستگاه را می‌توان مستقلا یك مدل $M/M/1$ تصور کرد. لذا،

$$L_۴ = ۴,\quad L_۳ = \frac{۷}{۳},\quad L_۲ = ۱٫۵,\quad L_۱ = ۴$$

درنتیجه طول صف برابر است با:

$$L = \frac{۷۱}{۶} = ۱۱٫۸۳۳$$

ازطرف دیگر، امید ریاضی مدت زمان انتظار یك مشتری برابر با امید ریاضی مدت‌زمان انتظار او در هر ایستگاه است؛ ولی، مشتریها به‌همهٔ ایستگاهها نمی‌روند. درواقع، همهٔ مشتریها ایستگاه ۱ را طی می‌کنند، ۳۰ درصد آنها به‌ایستگاه دوم می‌روند، ۷۰ درصد آنها به‌ایستگاه سوم و ۴۰ درصد به‌ایستگاه چهارم می‌روند، لذا

$$W = W_۱ + ۰٫۳\,W_۲ + ۰٫۷\,W_۳ + ۰٫۴\,W_۴$$

$W_i$ میانگین مدت‌زمان انتظار یك مشتری در ایستگاه $i$ ام است و چون هر ایستگاه، یك‌مدل $M/M/1$ محسوب می‌شود، لذا محاسبهٔ آنها نیز با استفاده از رابطهٔ $W$ در $M/M/1$ انجام می‌شود؛ یعنی،

$$W_۴ = \frac{۵}{۸},\ W_۳ = \frac{۵}{۲۴},\ W_۲ = \frac{۵}{۱۶},\quad W = ۰٫۷۴ \text{ ساعت است}$$



می‌توان بررسی کرد که رابطهٔ $L = \lambda W$ همچنان صادق است.

**مثال ۱۸.۷** یك سیستم صف را درنظر بگیرید، که سه ایستگاه خدمت ۱ و ۲ و ۳ داشته باشد. ورود مشتریها از خارج به این ایستگاهها طبق فرایند پواسون به‌ترتیب با آهنگ ۵ و ۱۰ و ۱۵ است. مدت زمان خدمت، نمایی، به ترتیب با آهنگ ۱۰ و ۴۰ و ۶۰ است. مشتریهایی که از ایستگاه ۱ خارج می‌شوند، با احتمالات مساوی به‌ایستگاههای ۲ و ۳ می‌روند. مشتریهایی که از ایستگاه ۲ خارج می‌شوند، همگی به‌ایستگاه ۳ می‌روند. چهل درصد مشتریهای ایستگاه ۳ به‌ایستگاه ۲ برمی‌گردند و بقیه از سیستم خارج می‌شوند. $L$ و $W$ را محاسبه کنید.

حل: این سیستم یك شبکهٔ صف با بازخورد است. اگر آهنگ ورود به ایستگاههای ۱ و ۲ و ۳ را به‌ترتیب $\lambda_1$ و $\lambda_2$ و $\lambda_3$ بنامیم، طبق رابطهٔ (۶۴.۷)،

$$\lambda_۱ = ۵$$

$$\lambda_۲ = ۱۰ + ۰٫۵\lambda_۱ + ۰٫۴\lambda_۳$$

$$\lambda_۳ = ۱۵ + ۰٫۵\lambda_۱ + \lambda_۲$$

نتیجه می‌شود که: $\lambda_۱ = ۵$ و $\lambda_۲ = ۳۲٫۵$ و $\lambda_۳ = ۵۰$ است

به این ترتیب،

$$L = L_۱ + L_۲ + L_۳ = \frac{۳۱}{۳},\quad \rho_۳ = \frac{۵}{۶},\quad \rho_۲ = ۰٫۸۱۲۵,\quad \rho_۱ = ۰٫۵$$

برای محاسبهٔ $W$ از رابطهٔ لیتل استفاده می‌شود. لازم به یادآوری است که آهنگ ورود به سیستم $\lambda'_۱ + \lambda'_۲ + \lambda'_۳ = ۵ + ۱۰ + ۱۵ = ۳۰$ است، که این مقدار برابر با مجموع آهنگ ورود به‌ایستگاههای مختلف نخواهد بود. در رابطهٔ لیتل، منظور از آهنگ ورود، میانگین کل مشتریهایی است که در واحد زمان از خارج سیستم وارد آن می‌شوند. بنابراین، مشتریهای هر ایستگاه را، که ممکن است چندبار وارد ایستگاههای مختلف شوند، باید فقط یك‌بار در کل سیستم منظور کرد. بدین ترتیب

$$W = \frac{L}{\lambda'_۱ + \lambda'_۲ + \lambda'_۳} = \frac{۳۱}{۹۰}$$

## مسائل

۱. در یك سیستم صف، ورود مشتریها براساس فرایند پواسون (با آهنگ $\lambda$) انجام می‌شود. این سیستم دارای دو خدمت‌دهنده است. مدت ارائهٔ خدمت توسط هر کدام از خدمت‌دهندگان دارای توزیع نمایی (با پارامترهای $\mu_1$ و $\mu_2$) است. اگر سیستم خالی باشد، مشتری به

احتمال ۲ر۰ خدمت‌دهندهٔ اولی و به احتمال ۶ر۰ خدمت‌دهندهٔ دومی را انتخاب می‌کند. اما، اگر حداقل یکی از خدمت‌دهندگان مشغول باشند، مشتری حق انتخاب خدمت‌دهنده را ندارد.

این مسئله را به‌شکل یك سیستم مارکوفی فورموله و نمودار آهنگ آن را رسم کنید و معادلات تعادلی آن را بنویسید (حل معادلات لازم نیست). میانگین تعداد مشتریهای داخل سیستم را برحسب احتمالات حدی به‌دست آورید. میانگین تعداد خدمت‌دهندگان بیکار چقدر است؟ احتمال اینکه یك مشتری از خدمت‌دهندهٔ اولی خدمت دریافت کند، چقدر است؟

۲. مسئلهٔ ۱ را مجدداً درنظر بگیرید، که در آن $\mu_1 < \mu_2$ است. اگر هر دو خدمت دهنده بیکار باشند، مشتری همواره خدمت‌دهندهٔ یك و درغیراین‌صورت هر خدمت‌دهنده‌ای را که بیکار باشد انتخاب می‌کند. به‌سؤالات مسئلهٔ ۱ مجدداً پاسخ دهید. درچه‌درصدی از زمان، هر کدام از خدمت‌دهندگان بیکارند؟

۳. ماشینهایی که‌دارای سه‌موتورهستند، برای تعمیر به‌تعمیرگاهی فرستاده می‌شوند. به‌طور متوسط، هر چهار ساعت یك ماشین به تعمیرگاه می‌رسد و فرض می‌شود که ورود ماشینها براساس فرایند پواسون است. مدت زمان تعمیر هرموتور (و نه هرماشین)، دارای توزیع نمایی با میانگین ۲۰ دقیقه‌است. درهر لحظه فقط یك موتور می‌تواند تحت تعمیر باشد.
الف. حالت سیستم را تعداد موتورهای داخل تعمیرگاه‌تعریف کنید. نمودار آهنگ‌را رسم کنید و معادلات تعادلی آن را بنویسید.
ب. این مسئله طبق چه‌مدلی‌است؟ میانگین مدت‌زمانی که یك ماشین داخل تعمیرگاه‌می‌ماند، چقدر است؟

۴. درمسئلهٔ ۳، فرض کنید که هرسه موتورماشین لزوماً احتیاج به‌تعمیر ندارند. به‌احتمال ۱/۳ یك موتور، به‌احتمال ۱/۳ دوموتور و به‌احتمال ۱/۳ هرسه‌موتور احتیاج به‌تعمیر دارند. دراین صورت، این مسئله را مجدداً حل کنید.

۵. یك سیستم صف با یك خدمت‌دهنده را درنظر بگیرید، که دونوع مشتری به‌آن مراجعه می‌کنند. مشتریهای نوع ۱ برنوع ۲ اولویت دارند. ورود هردونوع مشتری براساس فرایند پواسون (با میانگین به‌ترتیب ۱ و ۵ در ساعت) است. مدت‌زمان خدمت، نمایی با میانگین ۶ دقیقه است. اولویت باداشتن حق‌انقطاع فرض می‌شود.
الف. میانگین مدت‌زمان انتظاردرسیستم ومیانگین تعداد مشتریهای داخل سیستم را حساب کنید.
ب. میانگین مدت‌زمان انتظار درسیستم ومیانگین تعداد مشتریهای داخل سیستم، به‌فرض اینکه اولویت منظورنشود را ازبند الف محاسبه کنید.
ج) معادلات تعادلی این مدل رابنویسید

۶. درقسمت‌باریك فرودگاه‌بسته‌های محتوی‌چمدانها را برای بازرسیهای امنیتی‌می‌آورند.



زمان بین‌آمدن هردوبسته، نمایی بامیانگین ۲۰ دقیقه فرض می‌شود. در ۵۰ درصد بسته‌ها، شش چمدان ودر ۵۰ درصد دیگر، چهارچمدان وجوددارد. مدت‌زمان بازرسی‌یك‌چمدان، نمایی با میانگین ۳ دقیقه فرض می‌شود.
الف. اگر فقط یك بازرس وجود داشته باشد، احتمال اینکه بیکار باشد، چیست؟ احتمال اینکه فقط یك چمدان دیگر دربازرسی مانده باشد، چیست؟
ب. چنانچه سه‌بازرس کار کنند، نمودار آهنگ را رسم کنید و معادلات تعادلی را بنویسید.

۷. دریك کورهٔ الکتریکی، مدت‌زمان حرارت‌دادن قطعات، نمایی‌بامیانگین دوساعت‌است. سه‌قطعه را به‌طورهمزمان می‌توان داخل کوره جا داد، اما درصورت نبودن قطعات، کوره را بایك یا دوقطعه هم راه‌اندازی می‌کند. رسیدن قطعات برای اعمال حرارتی در کوره، طبق فرایند پواسون با آهنگ ۲ر۵ ساعت است. میانگین قطعاتی که منتظرهستند تا داخل کوره شوند، چقدر است؟

۸. برای حمل اتومبیلها از عرض یك رودخانه، ازقایقی مخصوص استفاده می‌شود، که گنجایش‌پنج اتومبیل را دارد. اتومبیلها طبق فرایند پواسون، بامیانگین ساعتی ۱۵ دستگاه برای عبورازرودخانه مراجعه می‌کنند. مدت رفت و برگشت قایق متغیری تصادفی باتوزیع نمایی است وبه‌طور متوسط ۱۲ دقیقه طول می‌کشد. احتمال اینکه اتومبیلی مراجعه کند و بلافاصله سوارقایق‌شود و از رودخانه عبور کند، چقدراست؟ میانگین تعداد اتومبیلهایی که عبور کنند، چقدراست؟ (فرض می‌کنیم که قایق حتماً باید پرشود تا حرکت کند).

۹. مشتریها طبق‌فرایندپواسون‌واردسیستم‌می‌شوند. تعدادمشتری واردشده درهرساعت به‌طور متوسط ۵ نفرفرض می‌شود. مدت‌زمان خدمت به‌طورمتوسط ده‌دقیقه‌طول می‌کشد. میانگین طول صف را، درصورتی که مدت زمان خدمت، نمایی، ثابت ویا ارلانگی (با $k = 3$) باشد، محاسبه کنید.

۱۰. درمحل انبارابزار کارخانه‌ای دوانباردار کار می‌کنند. اولی مسئول تحویل ابزار ماشین‌آلات و دومی مسئول تحویل سایر ابزارآلات است. کارگران برای دریافت ابزار طبق فرایند پواسون ($\lambda = 25$ درساعت) وارد انبار می‌شوند و ۴۰٪ آنان متقاضی ابزار ماشین‌آلات هستند. مدت‌زمان تحویل ابزار، نمایی بامیانگین۳ دقیقه است. بررسی انجام شده نشان می‌دهد که اگر هر دو انباردار مشترکاً کار کنند، مدت‌زمان خدمت به‌طورمتوسط $1/\lambda$ دقیقه کاهش می‌یابد و تابع توزیع آن $E_2$ خواهد بود. کدام روش بهتراست؟

۱۱. برای ادارهٔ ماشینی می‌توان یکی از دونفر داوطلب را استخدام‌کرد. اولی با این ماشین ۶ واحد محصول موردنظر و دومی ۵ واحد آنرا در روز، به‌طور متوسط تولید می‌کنند. مدت زمان تولید توسط اولی، نمایی و توسط دومی ارلانگی با $r = 2$ است. کدام یك ازاین دونفر را باید استخدام کرد؟ فرض کنید که‌تقاضا برای تولیدمحصول طبق فرایند پواسون با پارامتر $\lambda$ است.

۱۲. قسمت کنترل کیفیت‌کارخانه‌ای، قطعات معیوبی راکه با استانداردها تطبیق نمی‌کنند

برای اصلاح وتنظیم مجدد بـه قسمت تولید برمی‌گرداند. فرض می‌کنیم که به‌طورمتوسط هر ۱٫۵ دقیقه، یك قطعه معیوب شناخته می‌شود وفاصلهٔ زمانی بین فرستادن هر دوقطعه نیز نمایی است. برای اصلاح این قطعات یکی‌از دو روش زیر را می‌توانیم انتخاب‌کنیم.

کدام روش قطعات معیوب را پس از اصلاح زودتر به‌تولید برمی‌گرداند؟

الف. به کارگیری دو تعمیرکار، که هر کدام می‌توانند به‌طور متوسط یك قطعه را در ۲٫۵ دقیقه تعمیر کنند. مدت‌زمان تعمیر نمایی فرض شود.

ب. استفاده ازیك ماشین‌که هرقطعهٔ معیوب را دقیقاً در ۱٫۲۵ دقیقه تعمیرمی‌کند.

ج. در بند الف، احتمال اینکه کارگـر شمارهٔ یك بیکار بـاشد، چیست؟ مقدار احتمال را برحسب تابعی از $\rho$ به‌دست‌آورید.

۱۳. مدل $M/E_2/1$ را درنظر بگیرید. فرض کنید که ظرفیت صف صفر است. نمودار آهنگ را رسم‌کنید. احتمال اینکه سیستم خالی باشد، چقدراست؟

۱۴. مشتریها طبق فرایندپواسون واردسیستم می‌شوند. تعداد مشتری وارد شده درهرساعت به‌طور متوسط ۵ است. مدت‌زمان خدمت به‌طورمتوسط ده‌دقیقه است. میانگین طول صف را برحسب اینکه مدت‌زمان خدمت دارای توزیع نمایی، ثابت ویا ارلانگی (با ۳ مرحله) باشد، محاسبه‌کنید

۱۵. دریك مـدل $M/E_2/2/2$ نمودار آهنگ را رسم و $L$ و $W$ را محاسبه و صحت رابطهٔ لیتل را درمورد آنها تحقیق‌کنید. فرض‌کنید $\lambda = 20$ و $\mu = 8$ است.

۱۶. دریك مدل $E_2/M/2/2$، نمودار آهنگ را رسم و $L$ و $W$ را محاسبه کنید. فرض کنید $\lambda = 20$ و $\mu = 15$ است.

۱۷. سه نوع مشتری به‌یك سیستم مراجعه‌می‌کنند. ورود مشتریهای نوع ۱ و ۲ و ۳ براساس فرایند پواسون وبه‌ترتیب بـا میانگین ۲ و ۳ و ۶ مشتری درساعت است. مدت‌زمان ارائهٔ خدمت، توسط تنها خدمت‌دهندهٔ سیستم، نمایی وبا میانگین ۴ دقیقه است.

الف. میانگین مدت زمان انتظار درصف وهمچنین میانگین طول صف را درمورد هرنوع مشتری، دردوحالت زیرحساب‌کنید:

۱. درصورتی‌که ارائهٔ خدمت به‌مشتریهای هرسه‌گروه برحسب نوبت انجام شود؛

۲. درصورتی‌که‌مشتریهای نوع ۱ ازبالاترین اولویت ومشتریهای نوع ۲ ازاولویت بعدی برخوردار باشند (بدون حق انقطاع)

ب. ارتباط بین میانگین زمان انتظار وهمچنین طول صف حالت ۲ را با حالت ۱ مشخص کنید.

۱۸. مسئلهٔ ۱۷ را، بـا فرض اینکه سیستم دارای نظم اولویت باحق انقطاع است، مجدداً حل‌کنید.



۱۹. معادلات تعادلی را برای حالتهای $mn$ ۱ و $mn$ ۲، مدل $M/M/1$ با نظم اولویت و حق‌انقطاع بنویسید.

۲۰. مسئلهٔ فصل ششم را درنظربگیرید، فرض‌کنیدکه ماشینهای تعمیرشده را برای‌کنترل می‌فرستند.

الف. احتمال اینکه فاصله زمانی بین دو ماشینی‌که برای‌کنترل می‌فرستند، حداقل سه روز طول بکشد، چیست؟

ب. حال فرض‌کنیدکه به‌جای اینکه تمام ماشینها را برای کنترل بفرستند، فقط ۵۰ درصد آنها را به‌صورت تصادفی‌انتخاب می‌کنند وبرای‌کنترل می‌فرستند. مدت‌زمان‌کنترل، نمایی با میانگین ۱/۸ روز فرض می‌شود. اگرماشینی برای‌کنترل فرستاده شود، به‌طور متوسط، ازلحظهٔ اتمام تعمیرتا لحظهٔ خروج آن ازسیستم چقدرطول می‌کشد؟

ج. دربند ب، فرض‌کنید کـه ماشینها را یك درمیان (نه به‌صورت تصادفی)، برای‌کنترل می‌فرستند؟ جواب بند ب را مجدداً بررسی‌کنید؟

۲۱. دریك مدل $M/M/1$ با نظم اولویت وبدون حق‌انقطاع وبا دوگروه مشتری، آهنگ ورود مشتریهای گروههای ۱ و ۲ به‌ترتیب $\lambda_1$ و $\lambda_2$ وآهنگ خدمت‌دهی به‌آنها $\mu_1$ و $\mu_2$ است. دراین نظم، نشان‌دهید میانگین مدت‌زمـان خدمت برای‌کل سیستم، یعنی $W$ کمتر ازحالتی است‌که نظم اولویت وجود ندارد، به‌شرط اینکه $\mu_1 < \mu_2$ باشد.

۲۲. درمثال ۱۶.۷، با فرض اینکه $\lambda = 10$ و $\mu_1 = 20$ و $\mu_2 = 30$، احتمالات حدی و $L$ و $W$ را محاسبه‌کنید. چند درصد مشتریها نمی‌توانند وارد سیستم شوند؟

۲۳. مسئلهٔ ۲۲ را مجدداً درنظر بگیرید. فرض‌کنیدکـه مشتری پس ازدریافت خدمت از مرحلهٔ اول، درصورتی مرحلهٔ‌دوم را می‌گذراندکه‌آن مرحله‌خالی باشد. درغیراین‌صورت سیستم را ترك می‌کند.

الف. مجدداً به‌سؤالات مسئلهٔ ۲۲ جواب دهید.

ب. چه‌درصدی از مشتریهایی‌که وارد سیستم می‌شوند، هر دومرحله را می‌گذرانند.

۲۴. سوپرمارکتی را درنظر بگیریدکـه مشتریهایش کالاهای موردنیاز خود را شخصاً از قفسه‌ها انتخاب می‌کنند و سپس پول آن را به‌صندوقـدار می‌پردازند. مدت‌زمان انتخاب کالا وهمچنین مدت‌زمان محاسبهٔ قیمت کالا در صندوق، نمایی با میانگین به‌ترتیب۱۵دقیقه و ۵ دقیقه است. ورود مشتریها به‌این سوپرمارکت طبق فرایند پواسون است. در هرساعت به‌طور متوسط سی مشتری مراجعه می‌کنند. حداقل چند صندوقدار برای این سوپرمـارکت لازم است، میانگین مدت زمـان توقف یك مشتری دراین سوپرمـارکت (بافرض حداقل بودن تعداد صندوقداران) چقدراست؟

۲۵. دریك شبکهٔ سری، سه‌ایستگاه‌خدمت وجوددارد. ورود مشتریها به‌این‌شبکه طبق‌فرایند

پواسون با آهنگ $\lambda = 5$ و آهنگ خدمت در سه ایستگاه به‌ترتیب ۶ و ۸ و ۲ و تعداد خدمت‌دهنده در آنها به‌ترتیب ۲ و ۱ و ۲ و ظرفیت صف در هر سه ایستگاه نامتناهی است. احتمال خالی بودن سیستم چقدر است؟ احتمال اینکه در سیستم ۳ مشتری وجود داشته باشد، چقدر است؟ $L$ و $W$ را محاسبه کنید.

۳۶. مسئلهٔ ۲۵ را مجدداً درنظر بگیرید، با این تفاوت که ظرفیت صف در ایستگاه سوم برابر با ۳ است. آن‌گاه، به‌سؤالات مطرح شده پاسخ مناسب ارائه کنید.

۳۷. مسئلهٔ ۲۵ را مجدداً درنظر بگیرید، با این تفاوت که ظرفیت صف در ایستگاههای دوم و سوم برابر با صفر است. معادلات تعادلی را بنویسید. $L$ و $W$ را محاسبه کنید.

۳۸. در یك هتل، رستوران و چایخوری کنار یکدیگر قرار دارند. مراجعهٔ مشتریها از خارج به این هتل، طبق فرایند پواسون است. هر ساعت به طور متوسط ۳۰ مشتری به هتل مراجعه می‌کنند، ۶۰ درصد آنها مستقیماً به رستوران و بقیه به چایخوری می‌روند. بعد از صرف غذا ۸۰ درصد مشتریهای رستوران به‌چایخوری و ۳۰ درصد مشتریهای چایخوری به‌رستوران مراجعه می‌کنند. لیکن، هیچ مشتری دوبار به‌رستوران یا چایخوری نمی‌رود. مدت زمان ارائهٔ خدمت در هر دو قسمت، نمایی با میانگین ۲ دقیقه است. در هر لحظه، به‌طور متوسط چند نفر در رستوران و چند نفر در چایخوری هستند (بعد از دریافت غذا یا چای مشتریها به‌فضای خارج رستوران و چایخوری می‌روند.) به‌طور متوسط یك مشتری چه‌مدت در این هتل است؟ اگر کسی بخواهد به‌هر دو قسمت مراجعه کند، به‌طور متوسط چه‌مدت در هتل است؟

۳۹. خط تولید یك کارخانه از دو مرحله تشکیل شده‌است. کارهای سفارشی طبق فرایند پواسون با آهنگ ساعتی سه‌واحد به‌کارخانه ارجاع می‌شود. در مرحلهٔ اول که ماشینکاری است، مدت‌زمان خدمت، نمایی با میانگین ۱۵ دقیقه است. اما در مرحلهٔ دوم، هر دو قطعه، که از ماشینکاری خارج شده‌اند، به‌طور همزمان آبکاری می‌شوند. مدت‌زمان آبکاری نیز، نمایی با میانگین ۳۰ دقیقه است. (آبکاری یك قطعهٔ تنها، مقرون به‌صرفه نیست). به‌طور متوسط هر کار ارجاع‌شده چه‌مدت در کارخانه است؟

۴۰. یك شبکهٔ سری با دو ایستگاه خدمت را درنظر بگیرید، که ورود مشتریها براساس فرایند پواسون و مدت‌زمان خدمت در هر ایستگاه، نمایی با آهنگهای خدمت ۲۰ و ۱۰ (به‌ترتیب برای ایستگاههای ۱ و ۲) است. در هر ایستگاه یك خدمت‌دهنده مشغول به‌کار است. در لحظهٔ ورود یك مشتری مشخص، ایستگاه دوم خالی است. در دو حالت زیر، احتمال اینکه این مشتری در ایستگاه دوم معطل بشود، چیست؟

الف. مشروط براینکه می‌دانیم در صف ایستگاه اول منتظر نمی‌ماند.

ب. مشروط براینکه می‌دانیم در صف ایستگاه اول منتظر می‌ماند (در این حالت ثابت کنید که احتمال اینکه این مشتری در صف ایستگاه دوم منتظر بماند، حداقل برابر با ۲/۳ است).



۴۱. در یك سیستم صف با یك خدمت‌دهنده، مشتریها طبق فرایند پواسون با آهنگ $\lambda = 2$ در ساعت وارد می‌شوند. مدت‌زمان خدمت، نمایی با میانگین ۶ دقیقه است. هر مشتری پس از دریافت خدمت با احتمال ۰٫۸ از سیستم خارج می‌شود، ولی با احتمال ۰٫۲ مجدداً وارد سیستم می‌شود و در انتهای صف منتظر می‌ماند. بنابراین، هر مشتری ممکن است چندبار خدمت دریافت کند.

الف. آیا این سیستم یك مدل $M/M/1$ است؟

ب. احتمال اینکه یك مشتری پنج‌بار خدمت دریافت کند، چیست؟ میانگین تعداد دفعاتی که یك مشتری خدمت دریافت می‌کند، چقدر است؟

ج. احتمال اینکه پنج مشتری در سیستم باشند، چیست؟ $L$ را محاسبه کنید.

د. میانگین مدت‌زمان دریافت خدمت برای هر مشتری چقدر است؟

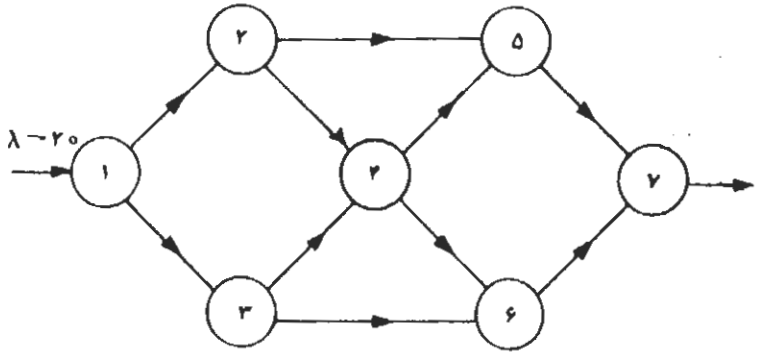
۴۲. در یك شرکت مهندسی مشاور، طراحی سیستمی از هشت مرحله تشکیل شده‌است. مدت‌زمان اجرای هر مرحله، نمایی با میانگین دو هفته است. تقاضا برای طراحی سیستمها طبق فرایند پواسون با میانگین هر ۲۰ هفته یك‌بار می‌رسد. در دو حالت زیر، مدت‌زمان انتظار هر کار (طراحی یك سیستم) چقدر طول می‌کشد؟ با چه مدلی تطبیق می‌کند؟

الف. یك مهندس، طراحی هر هشت مرحله را انجام می‌دهد.

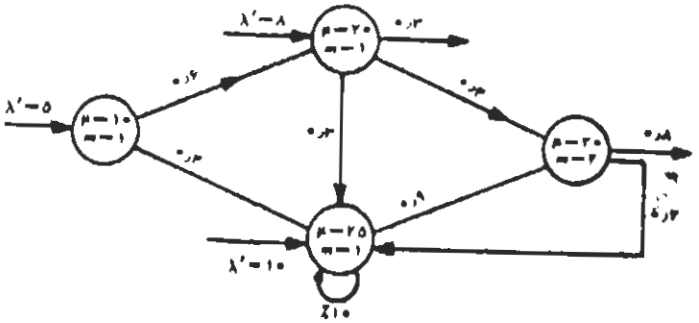
ب. برای طراحی هر مرحله یك مهندس وجود دارد.

۴۳. یك مدل $M/M/1$ را درنظر بگیرید، که آهنگ ورود و خدمت در آن به‌ترتیب ۸ و ۱۲ باشد. تفاوت این مدل با $M/M/1$ این است که در این سیستم، علاوه بر مشتریهای عادی یك مشتری مخصوص نیز مراجعه می‌کند، که از اولویت با حق انقطاع برخوردار است. این مشتری پس از دریافت خدمت مدتی خارج از سیستم است و دوباره به‌سیستم مراجعه می‌کند. مدت‌زمان بودن این مشتری در خارج از سیستم، متغیر تصادفی نمایی با میانگین ۵ است. آهنگ مراجعهٔ این مشتری را به‌دست آورید. یك مشتری عادی را درنظر بگیرید. تابع توزیع تعداد دفعات قطع خدمت این مشتری به‌علت آمدن مشتری مخصوص را تعیین کنید.

۴۴. یك شبکهٔ صف را درنظر بگیرید که ایستگاههای آن طبق شبکهٔ زیر است. ورود مشتریها فقط به‌ایستگاه یك و طبق فرایند پواسون است ($\lambda = 20$). مدت‌زمان خدمت در هر ایستگاه، نمایی فرض می‌شود. آهنگ خدمت در ایستگاههای یك تا هفت به‌ترتیب، ۳۰، ۲۰، ۱۵، ۲۰، ۱۵، ۱۵ و ۳۰ است. در هر ایستگاه فقط یك خدمت‌دهنده مشغول به‌کار است. در هر ایستگاه که خروجیهای آن به دو ایستگاه دیگر وارد می‌شوند، فرض بر این است که هر مشتری با احتمال مساوی به‌یکی از آن دو ایستگاه مراجعه می‌کند. $L$ و $W$ را برای هر ایستگاه و کل سیستم به‌دست آورید. آیا هر ایستگاه یك مدل $M/M/1$ است؟




۳۵. یك شبکهٔ صف را درنظر بگیرید، که ایستگاههای آن طبق شبکهٔ زیر است. ورود مشتریها از خارج سیستم به هر ایستگاه طبق فرایند پواسون و مدت زمان خدمت درهر ایستگاه نمایی فرض می‌شود. سایر اطلاعات موردنظر روی شبکه نشان داده شده‌است. $L$ و $W$ را برای هر ایستگاه و کل سیستم به‌دست آورید. آیا هرایستگاه یك‌مدل $M/M/m$ است؟




۳۶. یك خط تولید ازدوایستگاه‌پشت سرهم تشکیل شده‌است. قطعات، طبق فرایند پواسون با آهنگ ساعتی ۲۰ قطعه به‌ایستگاه اول می‌رسند. در هرایستگاه، پس ازعملیاتی که روی هرقطعه انجام می‌شود، سه‌حالت می‌تواند اتفاق بیفتد. یاقطعه با استانداردها تطبیق می‌کند وسالم شناخته می‌شود، یا قطعه سالم شناخته نمی‌شود و مجدداً برای تعمیر به‌همان ایستگاه برگردانده می‌شود، یا غیرقابل اصلاح است و به‌عنوان ضایعات از خط تولیدکنار گذاشته می‌شود. مدت‌زمان کار روی هر قطعه، متغیر تصادفی نمایی است وزمان اجرای عملیات روی قطعه برای‌اولین‌بار، بازمان تعمیرات تفاوتی نمی‌کند. اطلاعات مربوط به‌ایستگاهها درجدول صفحهٔ بعد خلاصه‌شده‌است. میانگین تعداد قطعات داخل سیستم‌را به‌دست آورید.



| ایستگاه | میانگین‌مدت‌اجرای‌عملیات (دقیقه) | درصدقطعات‌غیرقابل قبول‌ولی قابل‌اصلاح | درصدقطعات‌غیر قابل اصلاح |
|---|---|---|---|
| ۱ | ۱٫۵ | ۳۰ | ۱۰ |
| ۲ | ۲ | ۲۰ | ۵ |

# ۸

# سیستمهای صف غیرمارکوفی

دراین‌فصل، مدلهایی را موردبررسی قرارمی‌دهیم، که درآنها فقط یکی ازدومتغیر تصادفی زمان بین دو ورود متوالی مشتریها یا مدت زمان خدمت دارای تابع توزیع نمایی است. دراین مدلها، خاصیت بدون حافظه‌بودن سیستم دیگر برقرار نیست، زیرا متغیرهای فوق، نمایی نیستند. با وجود این، با استفاده ازخاصیت بدون حافظه بودن،همان متغیر تصادفی که دارای توزیع نمایی است، در مقاطعی از زمان سیستم می‌تواند دارای خاصیت مارکوفی باشد وهمین خاصیت مبنای تحلیل سیستم خواهد بود.

## ۱.۸ مدل $M/G/1$

براساس قراردادی که‌درفصل اول ارائه‌شد، دراین مدل زمان بین دو ورود متوالی مشتریها نمایی است. اما، مدت‌زمان خدمت می‌تواند هرمتغیر تصادفی باتابع توزیع دلخواه باشد. تابع چگالی این متغیر تصادفی را با $b(t)$ نشان می‌دهیم. در این مدل نیز، آهنگ ورود مشتری $\lambda$ وآهنگ خدمت $\mu$ فرض می‌شود.

### بیان مدل $M/G/1$ بشکل یک زنجیرهٔ مارکوف

برای استفاده ازخاصیت مارکوفی، فرایندی احتمالی را که درآن حالت سیستم بشرح



زیر تعریف شده باشد، درنظرمی‌گیریم:

$X_n$ = تعداد مشتری درسیستم درهنگام خروج $n$ امین مشتری

می‌خواهیم نشان دهیم که $X_n$ یک زنجیرهٔ مارکوف تشکیل‌می‌دهد. به‌طوری که‌مشاهده می‌شود، دراین سیستم هر مرحله، فاصلهٔ زمانی بین دو خروج متوالی مشتریها تعریف شده است. بدیهی است که مدت زمان واقعی هرمرحله ثابت نیست، بلکه متغیری تصادفی است، که‌تابع چگالی‌آن $b(t)$ فرض شده است. برای اینکه ثابت کنیم مجموعهٔ متغیرهای‌تصادفی $X_n$ یک زنجیرهٔ مارکوف تشکیل می‌دهد، باید نشان دهیم که $X_{n+1}$ فقط به $X_n$ بستگی دارد. این موضوع را ازرابطهٔ زیرمی‌توان استنتاج کرد:

$$X_{n+1}=\begin{cases} X_n-1+A, & \text{اگر } X_n\geqslant 1 \text{ باشد} \\ A, & \text{اگر } X_n=0 \text{ باشد} \end{cases} \qquad (1.8)$$

که $A$ عبارت ازتعداد مشتریهایی است که درطول مدت‌زمان ارائهٔ یک خدمت وارد سیستم می‌شوند. قسمت اول رابطهٔ فوق‌بدیهی است. برای روشن‌شدن قسمت دوم آن، فرض‌کنید که درلحظهٔ خروج $n$ امین مشتری، در سیستم مشتری دیگری نباشد، یعنی $X_n=0$. پس از مدتی، مشتری بعدی یعنی مشتری $(n+1)$ ام وارد می‌شود و بلافاصله شروع به دریافت خدمت می‌کند. اگر در مدت زمانی که این مشتری مشغول دریافت خدمت است، $A$ مشتری جدید وارد شوند، بدیهی است‌که در زمان خروج او همین تعداد مشتری هنوز در سیستم هستند.

به‌این ترتیب، چون مجموعهٔ متغیرهای تصادفی $X_n$، یک زنجیرهٔ مارکوف تشکیل می‌دهد، لازم است‌که ماتریس گذارآن نیز مشخص شود. برای سهولت در نشان دادن این ماتریس، ازقرارداد زیر استفاده می‌شود:

$$q_n=P[A=n] \qquad (2.8)$$

به‌عبارت دیگر، احتمال اینکه در طول مدت ارائهٔ یک خدمت، $n$ مشتری وارد شوند را با $q_n$ نشان می‌دهیم.

حال با استفاده از رابطه‌های(۱.۸) و(۲.۸) می‌توان ماتریس گذار را به‌شکل‌زیرنشان‌داد.

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 & \cdots \\ q_0 & q_1 & q_2 & q_3 & \cdots \\ 0 & q_0 & q_1 & q_2 & \cdots \\ 0 & 0 & q_0 & q_1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix} \qquad (3.8)$$

برای محاسبهٔ $q_n$، از رابطهٔ احتمال شرطی استفاده می‌کنیم. چنانچه $S$، مدت‌زمان ارائه‌خدمت، متغیر تصادفی پیوسته باشد،

$$q_n = P(A=n) = \int_0^\infty P(A=n|S=x)b(x)dx$$

ازطرف دیگر

$$P(A=n|S=x) = e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^n}{n!}$$

درنتیجه

$$q_n = \int_0^\infty e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^n}{n!}\, b(x)dx \qquad (۴.۸)$$

بامشخص‌بودن $b(x)$، مقدار $q_n$، $(n=0,1,2,\dots)$ محاسبه می‌شود.

اگر متغیر تصادفی مدت‌زمان خدمت گسسته باشد،

$$q_n = P(A=n) = \sum_s P(A=n|S=s)p_s = \sum_s e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^n}{n!}\, p_s \qquad (۵.۸)$$

**محاسبهٔ معیارهای ارزیابی درمدل $M/G/1$**

**قضیهٔ ۱.۸** دریك مدل $M/G/1$، بافرض $\rho<1$، معیارهای ارزیابی با استفاده از رابطهٔ زیر، که به‌نام رابطهٔ پلاچك خینکین[1] یا به‌طور اختصار $(P-K)$ موسوم است، محاسبه می‌شود

$$L_q = \frac{\rho^2+\lambda^2 \operatorname{Var}(S)}{2(1-\rho)} \qquad (۶.۸)$$

که $\operatorname{Var}(S)$ معرف واریانس مدت‌زمان خدمت است. ازطرف دیگر، میانگین مدت‌زمان خدمت $E(S)=1/\mu$ است. بنابراین،

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda E(S) \qquad (۷.۸)$$

سایرمعیارهای ارزیابی با استفاده ازاستنتاج لیتل به‌دست می‌آیند، برای نمونه

$$L = L_q + \rho$$

(همان‌طورکه مشاهده می‌شود، برای تعیین معیارهای ارزیابی در مدل $M/G/1$، تنها اطلاعات موردنیاز، میانگین و واریانس مدت‌زمان خدمت است ونیازی به‌دانستن تابع

1. Pollaczek - Khintchine



توزیع خدمت نیست)

اثبات: براساس‌تعریف، $L$ میانگین تعدادمشتریان‌درسیستم دردرازمدت است؛ یعنی،

$$L = \lim_{n\to\infty} E(X_n) \qquad (۸.۸)$$

برای محاسبهٔ $L$، ابتدا رابطهٔ (۱.۸) را به‌شرح زیربیان می‌کنیم:

$$X_{n+1} = X_n + A - Y \qquad (۹.۸)$$

که درعبارت فوق، $Y$ متغیری تصادفی است،که به‌شرح زیر تعریف می‌شود:

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{اگر } X_n > 0 \text{ باشد} \\ 0, & \text{اگر } X_n = 0 \text{ باشد} \end{cases} \qquad (۱۰.۸)$$

براساس این تعریف، رابطه‌های زیر نیز صدق می‌کند:

$$Y^2 = Y \qquad (۱۱.۸)$$

و

$$\lim_{n\to\infty} E(Y X_n) = L\ ,\quad Y X_n = X_n \qquad (۱۲.۸)$$

آن‌گاه، میانگین طرفین رابطه (۹.۸) وسپس امید ریاضی مجذور طرفین همان رابطه را، درحالی‌که $n\to\infty$، به‌دست می‌آوریم.

$$E(X_{n+1}) = E(X_n) + E(A) - E(Y) \qquad (۱۳.۸)$$

$$E(X_{n+1}^2) = E(X_n^2) + E(A^2) + E(Y^2) - 2E(YX_n) - 2E(AY) + 2E(AX_n) \qquad (۱۴.۸)$$

باتوجه به‌اینکه متغیر تصادفی $A$ مستقل از $Y$ و $X_n$ است و با درنظرگرفتن رابطهٔ (۸.۸)، داریم:

$$\lim_{n\to\infty} E(AX_n) = E(A)\cdot L \qquad (۱۵.۸)$$

وبااستفاده ازرابطه‌های (۱۲.۸)، (۱۴.۸) و (۱۵.۸)، دردرازمدت، نتیجه می‌شودکه:

$$E(A^2) + E(Y^2) - 2L - 2E(A)E(Y) + 2E(A)L = 0 \qquad (۱۶.۸)$$

(درعبارت فوق، رابطهٔ $E(X_{n+1}^2) = E(X_n^2)$، دردرازمدت، به‌کارگرفته شده‌است).

برای به‌دست‌آوردن $L$ ازرابطهٔ فوق، لازم است‌که میانگین و گشتاور دوم متغیرهای $Y$ و $A$ محاسبه شود.

$$E(A)=\int_0^\infty E(A|S=x)\,b(x)\,dx \qquad (۱۷.۸)$$

اما چون ورود مشتریها طبق فرایند پواسون است، بنابراین:

$$E(A|S=x)=\lambda x \qquad (۱۸.۸)$$

درنتیجه

$$E(A)=\lambda\int_0^\infty x\,b(x)\,dx=\lambda E(S) \qquad (۱۹.۸)$$

دررابطهٔ فوق، مقدار انتگرال، بر اساس تعریف میانگین برابر $E(S)$ است. از طرفی براساس تعریف آهنگ خدمت‌دهی، داریم

$$E(S)=\frac{1}{\mu} \qquad (۲۰.۸)$$

و

$$E(A)=\frac{\lambda}{\mu}=\rho \qquad (۲۱.۸)$$

ازطرف دیگر، با استفاده ازرابطه‌های (۱۱.۸) و (۱۳.۸) و (۲۱.۸) خواهیم داشت.

$$E(Y)=E(Y^2)=E(A)=\rho \qquad (۲۲.۸)$$

برای محاسبهٔ $L$ ازرابطهٔ (۱۶.۸)، تنها چیزی‌که باقی می‌ماند محاسبهٔ $E(A^2)$ است، که برای این کار، ازرابطهٔ واریانس وهمچنین (۲۱.۸) استفاده می‌کنیم.

$$\mathrm{Var}(A)=E(A^2)-(E(A))^2$$

یا

$$E(A^2)=\mathrm{Var}(A)+\rho^2=\rho+\lambda^2\,\mathrm{Var}(S)+\rho^2 \qquad (۲۳.۸)$$

باجایگزینی عبارات مربوطه در (۱۶.۸) رابطهٔ $P-K$ ثابت می‌شود

### حالت خاص $M/M/1$

دراین حالت

$$\mathrm{Var}(S)=\frac{1}{\mu^2}$$



دراین حالت طبق رابطهٔ $(P-K)$،

$$L=\rho+\frac{\rho^2+(\lambda/\mu)^2}{2(1-\rho)}=\rho+\frac{\rho^2}{1-\rho}=\frac{\rho}{1-\rho}$$

که همان نتیجه به‌دست آمده درمدل $M/M/1$ است.

**مثال ۱.۸** در یك سیستم صف، مشتریها طبق فرایند پواسون وارد می‌شوند. فاصلهٔ زمانی بین‌دو ورود مشتریها به‌طور متوسط ۴۵ دقیقه است. مدت‌زمان خدمت متغیری تصادفی است‌که هیستوگرام آن به‌شرح زیرخلاصه می‌شود.

| مدت‌زمان خدمت (دقیقه) | ۱۰ | ۱۵ | ۲۰ | ۳۵ | ۴۰ | ۴۵ | ۵۰ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| درصد $(p_i)$ | ۵ | ۱۰ | ۲۰ | ۲۵ | ۲۰ | ۱۰ | ۱۰ |

معیارهای ارزیابی این سیستم را محاسبه‌کنید

حل:

$$\frac{1}{\mu}=E(S)=۳۲٫۲۵ \text{ دقیقه}$$

$$E(S^2)=۱۱۸۶٫۲۵ \qquad (۲۴.۸)$$

$$\mathrm{Var}(S)=E(S^2)-[E(S)]^2=۱۴۶٫۱۸۷۸$$

$$\lambda=\frac{1}{45}$$

$$\rho=\frac{\lambda}{\mu}=\frac{۳۲٫۲۵}{45}$$

طبق رابطهٔ $(P-K)$

$$L_q=۱٫۰۳۴$$

و

$$L=L_q+\rho=۱٫۷۵$$

### احتمالات حدی درمورد $M/G/1$

اگر $\pi_n$ معرف وجود $n$ مشتری در لحظهٔ خروج یك مشتری باشد، با توجه به‌اینکه سیستم

یکپارچه و همه حالتها برگشت‌پذیر مثبت یا دورهٔ یک هستند، طبق قضیهٔ احتمالات حدی زنجیره‌ای مارکوف، خواهیم داشت:

$$\pi_n = q_0\pi_0 + \sum_{i=1}^{n+1} q_{(n-i+1)}\pi_i \ , \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (۲۴.۸)$$

و

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1$$

پس از حل دستگاه معادلات فوق و با درنظر گرفتن $\pi_0 = 1 - \rho$، مقادیر $\pi_n$، $(n = 1, 2, \ldots)$ به‌دست می‌آید. ضمناً می‌توان نشان داد که تبدیل $z$ مقادیر $\pi_n$ عبارت است از:

$$\pi(z) = \frac{(1-\rho)(1-z)Q(z)}{Q(z) - z} \qquad (۲۵.۸)$$

که $Q(z)$ تبدیل $z$ کمیتهای $q_n$ است؛ یعنی،

$$Q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n q_n \qquad (۲۶.۸)$$

بنابراین، پس از محاسبهٔ $q_n$، ابتدا $Q(z)$ و سپس $\pi(z)$ را محاسبه می‌کنیم. آن‌گاه از $\pi(z)$ مقادیر $\pi_n$، $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ به‌دست می‌آید.

توجه: باید توجه داشت که اگرچه ماتریس گذار زنجیرهٔ مارکوف فقط برای زمانهای خروج مشتریها تعریف شده‌است، ودرنتیجه $\pi_n$ و معیارهای ارزیابی فقط برای همین لحظات به دست آمده است، ثابت می‌شود که دراین مدل $\pi_n$ و سایر معیارهای ارزیابی برای لحظات دیگر نیزمعتبراست.

**مثال ۲.۸** مثال ۱.۸ را مجدداً در نظر بگیرید. اگر $S$ مدت‌زمان خدمت باشد، طبق رابطهٔ (۵.۸)

$$q_n = P(A = n) = \sum_s e^{-\lambda s} \frac{(\lambda S)^n}{n!} p_s$$

بنابراین، باتوجه به‌اینکه $\lambda = 1/45$ است

$$q_0 = 0.5075, \quad q_1 = 0.3256, \quad q_2 = 0.1236, \ldots$$

ازطرف دیگر

$$\pi_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{32.25}{45} = 0.283$$



با استفاده ازرابطه‌های (۲۲.۸)

$$\pi_0 = q_0\pi_0 + q_0\pi_1$$

$$\pi_1 = q_1\pi_0 + q_1\pi_1 + q_0\pi_2$$

درنتیجه

$$\pi_1 = 0.275, \quad \pi_2 = 0.184, \quad \pi_3 = 0.106$$

**مثال ۳.۸** یک‌مدل $M/M/1$ را درنظربگیرید. این‌مدل حالت‌خاصی از $M/G/1$ است، که تابع‌توزیع مدت‌زمان خدمت‌آن دارای توزیع‌نمایی است، یعنی،

$$b(t) = \mu e^{-\mu t}$$

طبق رابطهٔ (۴.۸)

$$q_n = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^n}{n!} \mu e^{-\mu x} dx = \frac{\mu}{n!} \int_0^{\infty} e^{-(\lambda+\mu)x} (\lambda x)^n dx$$

وطبق رابطهٔ (۲۶.۸)،

$$Q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n z^n = \mu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_0^{\infty} e^{-(\lambda+\mu)x} (\lambda x)^n dx$$

$$= \mu \int_0^{\infty} e^{-(\lambda+\mu)x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda x z)^n}{n!} dx = \mu \int e^{-(\lambda+\mu)x} e^{\lambda z x} dx = \frac{\mu}{\lambda + \mu - \lambda z}$$

وطبق رابطهٔ (۲۵.۸)

$$\pi(z) = \frac{(1-\rho)(1-z)Q(z)}{Q(z) - z} = \frac{\mu - \lambda}{\mu - \lambda z} = \frac{1-\rho}{1-\rho z}$$

برطبق آنچه که‌درمورد تبدیل $z$ گفته‌شد، تبدیل $z$ مجموعهٔ $\rho^n$، $(n = 0, 1, 2)$ مساوی‌است با $1/(1-\rho z)$. درنتیجه،

$$\pi_n = (1-\rho)\rho^n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

### دورهٔ اشتغال و بیکاری درمدل $M/G/1$

دراین مدل نیزچون ورود مشتریها براساس فرایندپواسون است، مدت‌زمان بیکاری سیستم دارای توزیع‌نمایی (با پارامتر $\lambda$) است، لذا

$$E(I)=\frac{1}{\lambda} \qquad (۲۷.۸)$$

ازطرف دیگر، دراین مدل نیز $\pi_0 = 1-\rho$ است. بدین‌ترتیب، دررابطهٔ (۲۴.۵) پس از جایگزینی $\pi_0$ و $E(I)$ نتیجه می‌شود، که

$$E(b)=\frac{1}{\mu-\lambda}=\frac{E(S)}{1-\lambda E(S)} \qquad (۲۸.۸)$$

ومیانگین تعداد مشتریانی که دریك دورهٔ اشتغال به‌آنها خدمت ارائه می‌شود، برابر است با

$$E(N_b)=\mu E(b)=\frac{1}{1-\lambda E(S)} \qquad (۲۹.۸)$$

### نظم اولویت درمدل $M/G/1$

یك مدل $M/G/1$ را درنظر بگیرید، که $N$ گروه مشتری با اولویتهای مختلف (و بدون حق انقطاع) داشته باشد. مدت‌زمان خدمت این گروهها با یکدیگر متفاوت است. فرض کنید $S_i$ مدت خدمت مشتری گروه $i$ باشد. دراین صورت میانگین مدت‌زمان انتظار هرمشتری درگروه $i$ ازرابطهٔ زیر به‌دست می‌آید (گروه ۱ بالاترین اولویت را دارد)

$$W_{q_1}=\frac{\sum_{j=1}^{N}\lambda_j E(S_j^2)}{2[1-\lambda_1 E(S_1)]} \qquad (۳۰.۸)$$

$$W_{q_i}=\frac{\sum_{j=1}^{N}\lambda_j E(S_j^2)}{2\left[1-\sum_{j=1}^{i-1}\lambda_j E(S_j)\right]\left[1-\sum_{j=1}^{i}\lambda_j E(S_j)\right]} \qquad (۳۱.۸)$$

باید توجه داشت که درحالت خاص $M/M/1$، که $E(S_i)=1/\mu_i$ و $E(S_i^2)=2/\mu_i^2$ است، ازرابطه‌های فوق نتایجی به‌دست می‌آید که قبلا برای $M/M/1$ ارائه شد.

روش اثبات رابطه‌های فوق یك مشتری گروه یك را، که بالاترین اولویت را دارد، درنظر بگیرید. اگر در زمان ورود او یك مشتری از گروه پایینتر، درحال دریافت خدمت باشد، تا زمان خروج او این مشتری باید صبر کند و از آن پس می‌توان تصور کرد که در سیستم فقط مشتری گروه ۱ وجود دارد. بنابراین، میانگین مدت‌زمان انتظار او عبارت است ازمجموع زمان‌مورد نیاز برای دریافت خدمت مشتریی که درزمان ورود او مشغول دریافت خدمت است به‌اضافهٔ مجموع زمان لازم برای خروج مشتریهای هم گروه خود او. همین استدلال درمورد



همهٔ گروههای دیگر نیز صدق می‌کند (به‌مسئله شمارهٔ ۱۱ همین بخش مراجعه‌شود).

**مثال ۴.۸** مثال ۱.۸ را مجدداً درنظر بگیرید. فرض کنید دونوع مشتری به این سیستم مراجعه می‌کنند. مدت‌زمان خدمت، که درمثال ۱.۸ ارائه شده‌است، فقط مختص مشتریهای دارای اولویت بالاست، که ۳۰٪ کل مراجعین را تشکیل می‌دهند. مدت‌زمان دریافت خدمت هفتاد درصد مشتریها، که از اولویت پایینتری برخوردارند، ثابت و برابر با نیم‌ساعت‌است. میانگین مدت‌زمان انتظارهر گروه ازمشتریها را محاسبه کنید.

حل: دراین مدل داریم:

$$\lambda_1=\frac{0.3}{45} \qquad \lambda_2=\frac{0.7}{45}$$

$$E(S_1)=32.25 \qquad E(S_1^2)=1186.25$$

$$E(S_2)=30 \qquad E(S_2^2)=900$$

درنتیجه، ازرابطهٔ (۳۰.۸)

$$W_{q_1}=13.95 \text{ دقیقه}$$

$$W_{q_2}=43.83 \text{ دقیقه}$$

ومیانگین کل سیستم

$$W_q=\frac{\lambda_1}{\lambda}W_{q_1}+\frac{\lambda_2}{\lambda}W_{q_2}=34.77 \text{ دقیقه}$$

## ۲.۸ مدل $M/G/1$ با ورود گروهی

دراین مدل نیز، فرض می‌شود که زمان بین دو ورود متوالی مشتریها دارای توزیع نمایی، با پارامتر $\lambda$ است؛ لیکن، هر بار به‌جای یك مشتری، گروهی مشتری وارد می‌شوند. احتمال اینکه هر گروه از $j$ مشتری تشکیل شده باشد را با $p_j$ نشان می‌دهیم. بنابراین $\lambda_j=\lambda p_j$، معرف میانگین تعداد گروههای متشکل از $j$ مشتری است، که درواحد زمان واردمی‌شوند. اگر $N$ تعداد مشتریهای یك گروه باشد،

$$E(N)=\sum_{j=1}^{\infty} j\, p_j$$

دراین مدل، میانگین طول صف ازرابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$L_q=\frac{\rho^2+[\lambda E(N)]^2\,\mathrm{Var}(S)}{2(1-\rho)}+\frac{\rho\left[\frac{E(N^2)}{E(N)}-1\right]}{2(1-\rho)} \qquad (۳۲.۸)$$

یادآوری می‌کنیم که دررابطهٔ فوق، آهنگ ورود مشتری $\lambda E(N)$ و

$$\rho=\frac{\lambda E(N)}{\mu}=\lambda E(N)\,E(S)$$

است. درحالت خاصی که تعداد مشتری درهر گروه، ۱ نفرباشد، جملهٔ دوم حذف می‌شود؛ زیرا، $E(N^2)=E(N)=1$ است.

**مثال ۵.۸** مثال ۱.۸ را مجدداً درنظر بگیرید، بااین تفاوت که زمان بین دو ورود گروهی به‌طور متوسط یک‌ساعت وربع وهر گروه بااحتمال ۵۰ درصد یک‌مشتری، بااحتمال ۲۵ درصد دومشتری و با احتمال ۲۵ درصد سه‌مشتری دارد. میانگین طول صف را محاسبه کنید.

حل:

$$E(N)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(2)+\frac{1}{2}(3)=\frac{7}{2}\ ,\ \lambda=\frac{1}{75}$$

$$E(N^2)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(4)+\frac{1}{2}(9)=\frac{15}{2}$$

$$\rho=\lambda E(N)\,E(S)=0{,}7525$$

وطبق رابطهٔ (۳۲.۸)،

$$L_q=3{,}04$$

## ۳.۸ مدل $M/G/m$

دراین مدل ورود مشتریها طبق فرایند پواسون با آهنگ $\lambda$، مدت زمان خدمت متغیری تصادفی دلخواه با تابع چگالی $b(t)$ است و سیستم دارای $m$ خدمت‌دهنده است.

درمدل $M/G/m$، میانگین طول صف ازرابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$L_q=\frac{r^{m-1}[\lambda^2\,\mathrm{Var}(S)+r^2]}{2(m-1)!\,(m-r)^2\left[\sum_{j=0}^{m-1}\frac{r^j}{j!}+\frac{r^m}{(m-1)!\,(m-r)}\right]} \qquad (۳۳.۸)$$

که $r=\lambda/\mu=\lambda E(S)$ است.

درحالت خاص، که $m=1$ باشد، رابطهٔ فوق به‌رابطهٔ $(P-K)$ تبدیل می‌شود.



## ۴.۸ مدل $G/M/1$

دراین مدل، مدت‌زمان خدمت دارای توزیع‌نمایی فرض می‌شود. لیکن، زمان بین دو ورود متوالی مشتریها متغیری تصادفی است، که می‌تواند هرنوع تابع توزیع دلخواهی را داشته باشد. تابع چگالی این متغیر تصادفی را با $a(t)$ بیان می‌کنیم. با توجه به تعریف آهنگ ورود مشتری $(\lambda)$ و با درنظر گرفتن اینکه میانگین زمان بین دو ورود متوالی برابر با $1/\lambda$ است، می‌توان $\lambda$ را برحسب $a(t)$ به‌شرح زیر بیان کرد:

$$\frac{1}{\lambda}=\int_0^t t\,a(t)\,dt$$

درحالتی که‌زمان بین دوورود متوالی‌مشتریها متغیر تصادفی گسسته‌باشد وفقط مقادیرمشخص $t_1, t_2, \ldots$ را با احتمالات $P_1, P_2, \ldots$ انتخاب کند، $\lambda$ ازرابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{1}{\lambda}=\sum_{i=1}^{\infty}t_i\,p_i$$

### بیان مدل $G/M/1$ برحسب زنجیرهٔ مارکوف

حالت سیستم را به‌شرح زیرتعریف می‌کنیم:

$X_n$ = تعداد مشتری درسیستم درلحظهٔ ورود مشتری $n$ ام

متغیرهای تصادفی $X_n$ یک زنجیرهٔ مارکوف تشکیل می‌دهند؛ زیرا $X_{n+1}$، فقط به $X_n$ بستگی دارد. رابطهٔ زیر این موضوع را نشان می‌دهد

$$X_{n+1}=X_n+1-B \qquad (۳۴.۸)$$

که $B$ معرف تعداد مشتریهایی است که‌درفاصلهٔ زمانی بین دوورود متوالی مشتریها خدمت دریافت‌می‌کنند. برای بیان ماتریس‌گذاراین زنجیرهٔ مارکوف، ابتدا مقادیر $b_i$ رابه‌ازای $i=0, 1, 2, \ldots$ و به‌شرح زیرتعریف می‌کنیم:

$$b_i=P[B=i] \qquad (۳۵.۸)$$

بنابراین، ماتریس‌گذار این زنجیرهٔ مارکوف به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} 1-b_0 & b_0 & 0 & \cdots \\ 1-b_0-b_1 & b_1 & b_0 & \cdots \\ \vdots & & & \\ 1-\sum_{i=0}^{n}b_i & b_n & b_{n-1} & \cdots \end{bmatrix} \qquad (۳۶.۸)$$

برای روشن شدن اینکه ماتریس گذار فوق چگونه به‌دست آمده است، چندعنصر آن را به‌شرح زیرمحاسبه می‌کنیم. دراین محاسبات ازرابطهٔ (۳۴.۸) استفاده می‌شود.

$$p_{01} = P[X_{n+1} = 1 | X_n = 0] = P[B = 0] = b_0$$

$$p_{02} = P[X_{n+1} = 2 | X_n = 0] = P[B = -1] = 0$$

$$p_{00} = P[X_{n+1} = 0 | X_n = 0] = P[B \geqslant 1] = 1 - b_0$$

رابطهٔ آخر، مربوط به محاسبهٔ $P_{00}$ (وهمچنین سایر مقادیر $P_{i0}$) بامحاسبهٔ عناصردیگر ماتریس متفاوت است. دررابطهٔ فوق، فرض می‌شودکه درلحظهٔ‌ورود یك مشتری مشخص، سیستم خالی باشد. بنابراین، بلافاصله خدمت به‌او شروع می‌شود. احتمال اینکه درلحظهٔ ورود مشتری بعدی سیستم بازهم خالی باشد، این است‌که ارائهٔ خدمت به‌مشتری موردنظر تمام شده باشد؛ لیکن، باید توجه داشت‌که بعد از رفتن این مشتری وقبل ازورود مشتری بعدی خدمت‌دهنده مدتی بیکارمی‌ماند. بنابراین، اگرچه دراین فاصله فقط به‌یك مشتری خدمت ارائه شده‌است، امکان ارائه خدمت به‌بیش ازیك مشتری وجود داشته است. به‌این ترتیب، $P_{00}$ معادل است با اینکه در فاصلهٔ بین دو ورود متوالی مشتریها حداقل به‌یك مشتری خدمت داده‌شود.

برای به‌دست‌آوردن مقادیر $b_i$ ازرابطهٔ زیراستفاده می‌شود:

$$b_i = \int_0^\infty e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^i}{i!} a(t)\, dt \qquad (۳۷.۸)$$

### احتمالات حدی درمدل $G/M/1$

درزنجیرهٔ مارکوفی که تشریح شد، تعداد مشتریهای داخل سیستم درلحظهٔ ورود را حالت سیستم تعریف کردیم. باتوجه به‌اینکه زمان بین دو ورود متوالی مشتریها متغیرتصادفی بدون حافظه نیست، احتمالات مربوط به‌تعداد مشتریها درسیستم درلحظات مختلف متفاوت است. اگر $\pi_i$، طبق معمول معرف بودن $i$ مشتری درسیستم دریك لحظه‌دلخواه و $P_i$ معرف احتمال بودن $i$ مشتری درسیستم، درلحظهٔ یك ورود باشد، $\pi_i$ و $P_i$ لزوماً یکی نیستند. در زنجیرهٔ مارکوف موردبحث، فقط امکان به‌دست‌آوردن احتمالات حدی $P_i$ وجود دارد. بنابراین، ابتدا معیارهای ارزیابی را فقط برای لحظه‌های ورود حساب می‌کنیم وآن‌گاه به‌معیارهای ارزیابی درحالت‌کلی می‌پردازیم.

باتوجه به‌اینکه این زنجیرهٔ مارکوف یکپارچه وتمام حالتهای‌آن برگشت‌پذیرمثبت و نادورهای هستند، با استفاده ازقضیهٔ احتمالات‌حدی، معادلات تعادلی درمدل $G/M/1$ به‌شرح زیرخواهد بود.



$$P_0 = \sum_{i=0}^{\infty} P_i \left[ 1 - \sum_{k=0}^{i} b_k \right] \qquad (۳۸.۸)$$

$$P_n = \sum_{i=n-1}^{\infty} P_i b_{i-n+1}, \quad n = 1, 2, \ldots \qquad (۳۹.۸)$$

و

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1 \qquad (۴۰.۸)$$

همان طورکه درمبحث زنجیره‌های مارکوف گفتیم، یکی ازمعادلات فوق زائد محسوب می‌شود ولذا برای حل این دستگاه نیازی به‌معادلهٔ شمارهٔ (۳۸.۸) نیست.

**مثال ۶.۸** یك‌مدل $G/M/1$ را درنظربگیرید، که درآن زمان بین دو ورود متوالی مشتریها ثابت وبرابر با ۱۵ دقیقه ومدت‌زمان خدمت دارای توزیع نمایی با میانگین ۱۵ دقیقه است. این مدل از نوع $D/M/1$ است، که درآن $\lambda = 4$ و $\mu = 6$ و $\rho = 2/3$ است. این مدل را به‌صورت یك زنجیرهٔ مارکوف نشان دهید.

حل: ابتدا مقادیر $b_n$ را به‌ازای $n = 0, 1, 2, \ldots$ وبا توجه به‌ثابت‌بودن زمان بین دو ورود محاسبه‌می‌کنیم.

$$b_n = P(B = n) = e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^n}{n!} = \frac{e^{-1.5}(1.5)^n}{n!} \qquad (۴۱.۸)$$

بنابراین، ماتریس‌گذار این مدل به‌شرح زیرخواهد بود:

$$P_{i,j} = \begin{cases} P[B = i+1-j] = e^{-1.5} \dfrac{(1.5)^{i+1-j}}{(i-j+1)!} & , \quad 1 \leqslant j \leqslant i+1 \\ 1 - \sum_{k=0}^{i} P(B = k) & , \quad j = 0 \\ 0 & , \quad i+2 \leqslant j \end{cases}$$

برای نمونه

$$P_{01} = P[B = 0] = e^{-1.5}$$

$$P_{52} = P[B = 3] = e^{-1.5} \frac{(1.5)^3}{3!} = 0.047$$

$$P_{20} = 1 - b_0 - b_1 - b_2 = 1 - e^{-1.5}\left[1 + 1.5 + \frac{(1.5)^2}{2}\right] = 0.191$$

**قضیهٔ ۳.۸** پس از حل دستگاه معادلات (۳۹.۸) و (۴۰.۸)، احتمالات حدی به‌شرح زیر به‌دست می‌آید:

$$P_n = (1 - x_0)x_0^n \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots \qquad (۴۲.۸)$$

که $x_0$ عددی بین صفر و یک و جواب معادلهٔ مشخصهٔ زیر است.

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n b_n \qquad (۴۳.۸)$$

اثبات: به‌فرض اینکه معادلهٔ (۴۳.۸) جوابی بین صفر و یک داشته باشد، با جایگزینی $P_n$ از رابطهٔ (۴۲.۸) در رابطهٔ (۳۸.۸)، صحت این قضیه نشان داده می‌شود.

**مثال ۷.۸** احتمالات حدی را در مثال ۶.۸ به‌دست آورید.

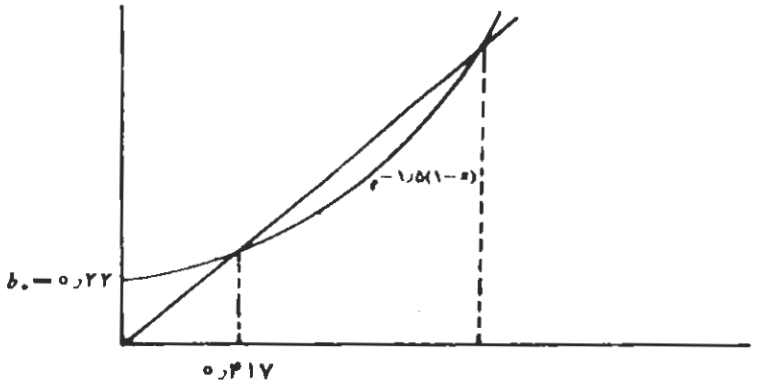
حل: برای حل معادلهٔ مشخصهٔ (۴۳.۸) از رابطهٔ (۲۱.۸) استفاده می‌شود. در نتیجه

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n e^{-1.5} \frac{(1.5)^n}{n!} = e^{-1.5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1.5x)^n}{n!}$$

یا

$$x = e^{-1.5(1-x)}$$

برای حل این معادلهٔ مشخصه از روش ترسیمی استفاده می‌شود. از یک طرف، معادلهٔ $y_1 = e^{-1.5(1-x)}$ و از طرف دیگر تابع $y_2 = x$، که نیمساز محورهای مختصات است، رسم می‌شود. محل تلاقی آنها به‌ازای $x_0 = 0.417$، جواب موردنظر در معادلهٔ مشخصه است. در نتیجه




**شکل ۱.۸** روش ترسیمی برای حل معادلهٔ مشخصهٔ مثال ۷.۸



$$P_0 = (1 - x_0) = 0.583$$

$$P_n = (0.583)(0.417)^n$$

**قضیهٔ ۴.۸** معادلهٔ مشخصهٔ (۴۳.۸) معادل رابطهٔ زیر است:

$$x = \int_0^{\infty} e^{-\mu t(1-x)} a(t)\,dt \qquad (۴۴.۸)$$

و اگر زمان بین دو ورود مشتریها متغیر تصادفی گسسته باشد، معادلهٔ مشخصه به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$x = \sum_t e^{-\mu t(1-x)} P(T = t) \qquad (۴۵.۸)$$

که $T$، معرف زمان بین دو ورود مشتریهاست، که مقادیر گسستهٔ $t$ را انتخاب می‌کند.

اثبات: اگر در معادلهٔ مشخصه (۴۳.۸)، به‌جای $b_n$ مقدار آن از رابطهٔ (۳۷.۷) جایگزین شود،

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \int_0^{\infty} e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^n}{n!} a(t)\,dt = \int_0^{\infty} e^{-\mu t} a(t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu t x)^n}{n!}\,dt$$

چون رابطهٔ $\sum \frac{(\mu t x)^n}{n!} = e^{\mu t x}$ برقرار است. لذا پس از جایگزینی و انتگرال‌گیری، رابطهٔ (۴۴.۸) به‌دست می‌آید. رابطهٔ (۴۵.۸) نیز با روشی مشابه ثابت می‌شود.

**مثال ۸.۸** معادلهٔ مشخصهٔ مثال (۶.۸) را با استفاده از قضیهٔ فوق به‌دست آورید.

حل: چون زمان بین دو ورود ثابت است، از رابطهٔ (۴۵.۸) استفاده می‌شود. در این مدل،

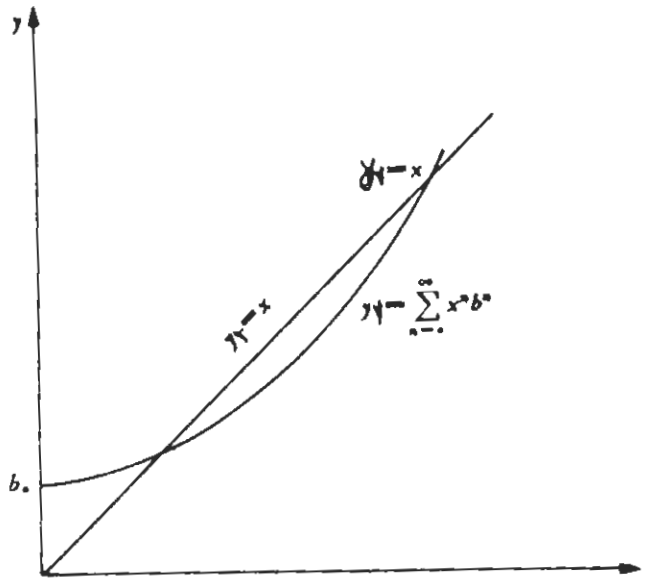
$$P\left(T = \frac{1}{2}\right) = 1$$

و در نتیجه

$$x = e^{-1.5(1-x)}$$

**قضیهٔ ۴.۸** در مدل $G/M/1$، اگر $\rho < 1$ باشد، معادلهٔ مشخصهٔ (۴۳.۸) فقط دارای یک جواب $x_0$ بین صفر و یک خواهد بود و اگر $\rho \geq 1$ باشد، معادلهٔ مشخصهٔ مذکور در فاصلهٔ صفر تا یک هیچ جوابی نخواهد داشت.

اثبات: برای به دست آوردن جواب معادلهٔ مشخصه، دو طرف آن را جداگانه بر یک دستگاه محورهای مختصات رسم می‌کنیم. تابع $y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} x^n b_n$ محور $y$ ها را در نقطهٔ $b_0$ قطع می‌کند. این تابع به‌ازای تمام مقادیر $x \geq 0$ افزاینده و محدب است، زیرا مشتقهای اول و دوم آن مقادیری مثبت است. بنابراین، این تابع و تابع $y_2 = x$ حداکثر




**شکل ۲.۸** روش ترسیمی حل معادلهٔ مشخصه درمدل $G/M/1$

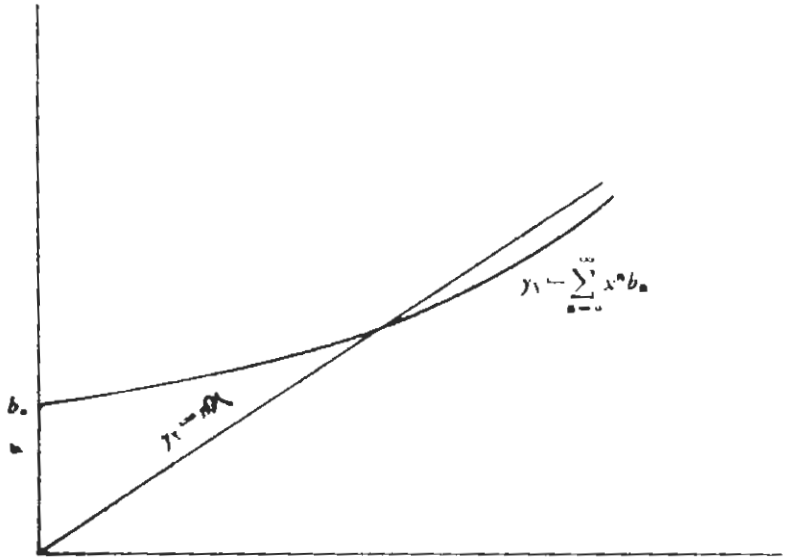
دردو نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند. از طرف دیگر، بـه‌سادگی معلوم می‌شود، که یکی از نقاط تقاطع این دوتابع‌همواره درنقطهٔ $x=1$ اتفاق‌می‌افتد. بنابراین، این‌دوتابع حداکثر در یك نقطهٔ دیگر بـا یکدیگر تلاقی دارند. دراین مورد، دوحالت اتفاق می‌افتد. درحالت اول، که درشکل ۲.۸ نشان داده شده است، ضریب زاویهٔ تابع $y_1$ درنقطهٔ $x=1$ بزرگتر ازیك است، که دراین‌صورت، دریك نقطه درفاصلهٔ صفر تایك، این دو منحنی یکدیگر را قطع می‌کنند. درحالت دوم، که درشکل ۳.۸ نشان داده شده‌است، دومنحنی درفاصلهٔ صفر تایك‌یکدیگررا قطع نمی‌کنند، زیرا، ضریب زاویهٔ تابع $y_1$ درنقطهٔ $x=1$ حداکثر برابر با یك است.

ازطرف دیگر، ضریب زاویهٔ تابع $y_1$ درنقطهٔ $x=1$ برابراست با:

$$\left.\frac{dy_1}{dx}\right|_{x=1} = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} b_n \Big|_{x=1} = \sum_{n=0}^{\infty} n b_n$$

همان‌طورکـه مشاهده می‌شود، عبارت سمت راست معرف میانگین تعداد خدمتهایی است که درفاصلهٔ بین دو ورود ارائـه می‌شود واین مقدار برابراست بـا $\mu/\lambda$، زیرا میانگین تعداد موارد خدمت درواحد زمان $\mu$ ومیانگین مدت‌زمان بین دو ورود $1/\lambda$ است. بدین‌ترتیب، ضریب زاویهٔ تابع $y_1$ درنقطهٔ $x=1$، برابر با $1/\rho$ است. و همان‌طورکه گفتیم،






**شکل ۳.۸** معادلهٔ مشخصه درمدل $G/M/1$، در حالتی‌که $\rho \geqslant 1$ باشد.

اگر مانند شکل ۲.۸، ضریب زاویـه، بزرگتر از یك یا $\rho<1$ باشد، معادلهٔ مشخصه، یك جواب بین صفر ویك دارد؛ درغیر این صورت، دراین فاصله جوابی برای معادلهٔ مشخصه وجود نخواهد داشت.

**مثال ۹.۸** احتمالات حدی مـدل $M/M/1$ را با استفاده از نتایج مدل $G/M/1$ به‌دست‌آورید.

حل: با استفاده ازرابطهٔ (۲۲.۸) وبا درنظرگرفتن اینکه $a(t)=\lambda e^{-\lambda t}$ است،

$$x = \int_0^{\infty} e^{-\mu t(1-x)} \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{\lambda}{\lambda+\mu-\mu x}$$

یا

$$\mu x^2 - (\lambda+\mu)x + \lambda = 0$$

ریشه‌های این‌معادله عبارت‌اند از:

$$x = 1 \text{ و } \rho$$

همان طورکه مشاهده می‌شود، یکی از ریشه‌ها همواره یك است. دراین مدل، اگر $\rho<1$ باشد، ریشهٔ دیگر معادله $x_0=\rho$، عـددی بین صفر و یك است. اگر $\rho \geqslant 1$ باشد، سیستم

ناپایدار است. در حالت پایدار، احتمالات حدی برابر است با:

$$\pi_n = (1-x_0)x_0^n = (1-\rho)\rho^n$$

که با نتایج قبلی که در مدل $M/M/1$ به‌دست آمد، تطبیق می‌کند.

## معیارهای ارزیابی در مدل $G/M/1$

تا اینجا نحوهٔ محاسبهٔ احتمالات حدی و به‌تبع آن معیارهای ارزیابی سیستم در لحظهٔ ورود به‌دست آمد. برای محاسبهٔ معیارهای ارزیابی در کل سیستم به‌شرح زیر عمل می‌کنند.

### نحوهٔ محاسبهٔ $W$ و $W_q$

یک مشتری را در نظر بگیرید. مدت زمان انتظار این مشتری درصف بستگی به‌تعداد مشتریهایی دارد که در لحظهٔ ورود این مشتری درسیستم هستند. بنابراین، برای محاسبهٔ این معیار از رابطهٔ احتمال شرطی استفاده می‌کنیم.

$$W_q = E(T_q) = \sum_{n=0}^{\infty} E(T_q | N=n) P_n$$

اگر درلحظهٔ ورود این مشتری، تعداد مشتریهایی که در سیستم هستند، برابر با $n$ باشد، مدت‌زمان انتظار او درصف برابر با مجموع مدت‌زمان خدمت همهٔ مشتریهای قبل‌از اوست. ازطرفی، میانگین مدت‌زمان خدمت هرمشتری برابر با $1/\mu$ است. لذا،

$$E(T_q | N=n) = \frac{n}{\mu}$$

درنتیجه

$$W_q = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{\mu} \cdot (1-x_0)x_0^n = \frac{(1-x_0)x_0}{\mu} \sum_{n=0}^{\infty} n x_0^{n-1}$$

با استفاده ازنتیجهٔ سری $\sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} = 1/(1-x_0)^2$، خواهیم‌داشت:

$$W_q = \frac{x_0}{\mu(1-x_0)} \qquad (۴۶.۸)$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu(1-x_0)} \qquad (۴۷.۸)$$



وبا استفاده ازاستنتاج لیتل

$$L = \lambda W = \frac{\rho}{1-x_0} \qquad (۴۸.۸)$$

$$L_q = \frac{\rho \cdot x_0}{1-x_0} \qquad (۴۹.۸)$$

ازطرف دیگر، دراین مدل نیزشبیه سایرمدلهایی که یک خدمت‌دهنده دارند،

$$\pi_0 = 1-\rho$$

ومی‌توان نشان داد که

$$\pi_n = \rho(1-x_0)x_0^{n-1}, \qquad n \geqslant 1 \qquad (۵۰.۸)$$

**مثال ۱۰.۸** معیارهای ارزیابی مدل $M/M/1$ را با استفاده ازمدل $G/M/1$ به‌دست آورید.

حل: طبق نتیجهٔ مثال (۹.۸)، در مدل $M/M/1$، ریشهٔ معادلهٔ مشخصه، $x_0 = \rho$ است (به‌شرط اینکه $\rho < 1$ باشد). درنتیجه

$$\pi_n = (1-\rho)\rho^n$$

$$W = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

$$W_q = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$

$$L = \frac{\rho}{1-\rho}$$

$$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

**مثال ۱۱.۸** دریک مدل $G/M/1$، که مدت زمان خدمت دارای توزیع نمایی با میانگین ۸ دقیقه است، زمان بین دو ورود متوالی مشتریها متغیری گسسته است، که مقدار آن ۸ یا ۱۰ یا ۱۲ یا ۱۴ دقیقه با احتمالات، به ترتیب ۴ر۰، ۳ر۰، ۲ر۰ و ۱ر۰ است. معیارهای ارزیابی این مدل را محاسبه کنید.

حل: دراین مدل، میانگین مدت‌زمان بین دو ورود برابر است با،

$$\frac{1}{\lambda} = (8)(0.4) + (10)(0.3) + (12)(0.3) + (14)(0.1) = 10 \text{ دقیقه}$$

بنابراین، $\lambda = 1/10$ و $\mu = 1/8$ و $\rho = 0.8$ است.

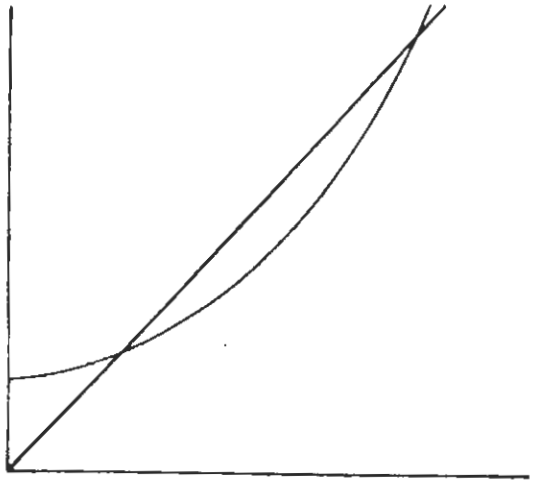
معادلهٔ مشخصهٔ این مدل، طبق رابطهٔ (۲۵.۸) به‌صورت رابطهٔ زیر درمی‌آید:

$$x = 0.2e^{-(1-x)} + 0.3e^{-1.25(1-x)} + 0.2e^{-1.5(1-x)} + 0.1e^{-1.75(1-x)}$$

چون $\rho < 1$ است، طبق قضیهٔ (۳.۸) معادلهٔ مشخصهٔ فوق دارای یك جواب $x_0$ است، که مقدار آن عددی بین صفر ویك است. برای محاسبهٔ $x_0$، جدول زیر را تهیه می‌کنیم:

| $x$ | مقدار سمت راست معادلهٔ مشخصه |
|---|---|
| ۰ | ۰٫۲۹۵ |
| ۰٫۲ | ۰٫۳۷۵ |
| ۰٫۴ | ۰٫۴۷۷ |
| ۰٫۶ | ۰٫۶۰۹ |
| ۰٫۸ | ۰٫۷۸ |
| ۱ | ۱ |

درشکل ۴.۸، دو طرف معادلهٔ مشخصه با استفاده از نتایج جدول فوق رسم شده است. جواب حاصل $x_0 = 0.64$ است.



**شکل ۴.۸** روش ترسیمی برای حل مثال ۱۱.۸



درنتیجه،

$$\pi_0 = 1 - \rho = 0.2$$

$$\pi_n = \rho(1 - x_0)x_0^{n-1} = 0.288(0.64)^{n-1}, \quad n \geq 1$$

$$W = \frac{1}{\mu(1 - x_0)} = 22.22 \text{ دقیقه}$$

$$W_q = \frac{x_0}{\mu(1 - x_0)} = 14.22 \text{ دقیقه}$$

$$L = \frac{\rho}{1 - x_0} = 2.22$$

$$L_q = \frac{\rho x_0}{1 - x_0} = 1.22$$

می‌توان $L$ را از رابطهٔ زیر به‌دست آورد:

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi_n = 0.288\sum_{n=1}^{\infty} n\,0.64^{n-1} = \frac{0.288}{(1 - 0.64)^2} = 2.22$$

## مسائل

۱. به‌بخش تزریقات یك درمانگاه، که فقط یك مأمور دارد، هر ساعت به‌طور متوسط ۱۰ نفر مریض مراجعه‌می‌کنند. ورود این مریضها طبق فرایند پواسون است. مدت‌زمان تزریق، متغیر تصادفی یکنواخت و بین سه تا ۶ دقیقه است. به‌طور متوسط درهر لحظه چند نفر مریض دراین بخش هستند؟ به‌طورمتوسط یك مریض چه مدت دراین درمانگاه وقت صرف می‌کند؟

۲. درمسئلهٔ ۱، اگر مدت‌زمان انجام تزریقات ثابت و برابر با ۴٫۵ باشد، به‌سؤالات مطرح‌شده مجدداً پاسخ دهید

۳. مسئلهٔ ۱ را مجدداً درنظر بگیرید. فرض کنید که‌مریضها برای دریافت یکی ازچهارنوع خدمت مراجعه‌می‌کنند. مدت‌زمان ارائهٔ هرخدمت ثابت وطبق جدول زیراست. به‌سؤالات مطرح‌شده مجدداً پاسخ دهید.

| نوع خدمت | مدت‌زمان (دقیقه) | درصد مشتریهای متقاضی این نوع خدمت |
|---|---|---|
| ۱ | ۳ | ۲۰ |
| ۲ | ۴ | ۳۰ |
| ۳ | ۵ | ۳۰ |
| ۴ | ۶ | ۲۰ |

۴. درمسائل ۱ و ۳، واریانس تعداد بیماران درمانگاه را محاسبه کنید.

۵. دریك مرکز کنترل کیفیت، تعداد قطعاتی که برای بازرسی می‌رسند، طبق فرایند پواسون است (به‌طور متوسط هر ۱۲ دقیقه یك قطعه). مدت زمان بازرسی، متغیر تصادفی و نرمال با میانگین ۸ دقیقه و واریانس ۳۲ (دقیقه)$^2$ است. چنانچه به‌جای بازرس فعلی یك ماشین اتوماتیك قراردهیم، مدت‌زمان بازرسی قطعی (غیراحتمالی) خواهدشد. مدت‌زمان بازرسی توسط این ماشین باید چقدر باشد تا میانگین تعداد قطعاتی که در مرکز کنترل کیفیت هستند، تغییر نکند؟

۶. دریك سیستم صف، مشتریها طبق فرایند پواسون با پارامتر ۱۰ مشتری در ساعت وارد می‌شوند، مدت‌زمان خدمت، طبق توزیع یکنواخت، بین ۳ تا ۵ دقیقه است.
الف. احتمال خالی بودن سیستم چیست؟
ب. میانگین مدت‌زمان انتظار مشتری درسیستم چیست؟
ج. اگرمدت‌زمان خدمت ثابت باشد، مقدار آن چقدر باید باشد تاجواب بند ب تغییری نکند

۷. دریك سیستم صف، ورود مشتریها براساس فرایند پواسون بامیانگین هرساعت ۹مشتری است. نتایج زمان‌سنجی درمورد مدت زمان خدمت (برحسب دقیقه) به‌شرح زیر است.
۸٫۳، ۵٫۹، ۱٫۸، ۶٫۳، ۲٫۵، ۱۰٫۲، ۷٫۸، ۵٫۵، ۴٫۲، ۷٫۱، ۶٫۲، ۳٫۹، ۴٫۲، ۷٫۳، ۷٫۲، ۹٫۵، ۴٫۸، ۵٫۲، ۶، ۵٫۵، ۴٫۸، ۳٫۵، ۸٫۴، ۱۰٫۳، ۶٫۱، ۴٫۸، ۵، ۲٫۹، ۵٫۱، ۴٫۵
معیارهای ارزیابی این سیستم را محاسبه کنید.

۸. به یك سیستم صف، هرساعت به‌طورمتوسط ده مشتری طبق فرایند پواسون واردمی‌شوند. این سیستم فقط یك خدمت‌دهنده دارد، لیکن مشتریها متقاضی دونوع خدمت هستند. ۸۰ درصد مشتریها متقاضی خدمت نوع ۱ و ۲۰ درصد بقیه متقاضی خدمت نوع دوهستند. مدت‌زمان هردو خدمت، نمایی با میانگینهای به‌ترتیب ۲ و ۴ دقیقه است.
الف. میانگین و واریانس مدت‌زمان خدمت را در کل سیستم تعیین کنید
ب. میانگین طول صف را محاسبه کنید.



ج. چنانچه ظرفیت صف حداکثر سه باشد، نمودار آهنگ‌را رسم کنید. دراین‌حالت احتمال اینکه از ورود یك مشتری جلوگیری شود، چیست؟
د. دربند «ج»، احتمال اینکه یك مشتری که وارد سیستم شده است، بتواند بلافاصله خدمت دریافت کند، چیست؟

۹. به یك ایستگاه تولید، هر ۸٫۵ دقیقه یك‌بار، قطعه‌ای می‌رسد. این مدت زمان قطعی (غیراحتمالی) است. مدت‌زمان کار روی هرقطعه دراین ایستگاه، نمایی با میانگین ۶دقیقه است. میانگین تعداد قطعات دراین ایستگاه در دوحالت زیرچقدر است؟
الف. لحظهٔ ورود یك قطعهٔ جدید
ب. دریك لحظهٔ مشخص

۱۰. یك مدل $M/G/1/4$، که آهنگ ورود مشتریها به آن‌درهرساعت برابر ۳ است، را درنظر بگیرید. مدت‌زمان خدمت، ثابت و برابر با ۱۵دقیقه است. این مدل را به‌یك زنجیرهٔ مارکوف (گسسته) تبدیل و ماتریس گذار آن‌را بنویسید. احتمالات حدی این ماتریس را به‌دست آورید. این احتمالات حدی را بااحتمالات حدی مدل $M/G/1$، با همان آهنگ ورود و آهنگ خدمت مقایسه کنید.

۱۱. یك لحظهٔ‌مشخص را درنظربگیرید، که یك مشتری واردیك سیستم $M/G/1$ می‌شود. نشان دهید که میانگین مدت‌زمانی که طول می‌کشد تا اولین مشتری خارج شود، برابر با $(\lambda/2)E(S^2)$ است، که در آن $\lambda$ آهنگ ورود مشتری و $E(S^2)$ مدت‌زمان خدمت است.

۱۲. مسئلهٔ ۳۴ فصل هفتم را مجدداً درنظر بگیرید، با این تفاوت که مدت‌زمان خدمت در ایستگاه ۷، متغیرتصادفی باتوزیع یکنواخت درفاصلهٔ (۳٫۵ و ۵٫۵) است.

۱۳. در مسئلهٔ ۹ احتمال اینکه موقع خارج‌شدن یك قطعه ازسیستم، دوقطعهٔ دیگرهم درآن ایستگاه باشد، چیست؟ احتمال اینکه موقع واردشدن یك قطعه به‌سیستم، دوقطعهٔ دیگر هم درآن ایستگاه باشد، چیست؟

۱۴. مسئلهٔ ۵ فصل هفتم را مجدداً حل‌کنید، با این تفاوت که مدت‌زمان خدمت مشتریهای گروه ۱، ثابت(۶ دقیقه) و زمان خدمت مشتریهای گروه ۲ متغیرتصادفی باتوزیع نرمال (با میانگین ۶ دقیقه وواریانس ۲۰) است.

۱۵. مسئلهٔ ۶ فصل هفتم را مجدداً حل‌کنید؛ با این تفاوت که مدت‌زمان بازرسی چمدانها دارای توزیع یکنواخت درفاصلهٔ ۲ تا ۴ دقیقه است.

۱۶. مسائل ۱ و ۳ را مجدداً حل کنید، با این تفاوت که تعداد مسئولین نزریفات به‌جای یکی دونفر باشد.

۱۷. یك مدل $M/G/\infty$ را درنظر بگیرید. تابع توزیع مدت‌زمان خدمت، $B(t)$ فرض

می‌شود. یك لحظهٔ مشخص مانند s را درنظر بگیرید. ثابت کنید:

الف. احتمال اینکه یکی ازمشتریهایی که قبل ازلحظهٔ s وارد سیستم شده است، هنوز آن‌را ترك نکرده باشد، برابراست.

$$p=\frac{1}{s}\int_0^s B(s-x)dx$$

ب. احتمال اینکه درلحظهٔ s تعداد $n$ مشتری درسیستم باشد، برابراست،

$$e^{-\lambda ps}\frac{(\lambda ps)^n}{n!}$$

که درآن $\lambda$ آهنگ ورود مشتری است.

# ۹

# بهینه‌سازی سیستمهای صف

## ۱.۹ ظرفیت بهینه و هزینه‌های یك سیستم صف

هدف از بهینه‌سازی درسیستمهای صف، تعیین ظرفیت آنهاست، به‌طوری که نه باعث اتلاف بیش ازحد وقت مشتریها شود ونه اینکه ظرفیت سیستم آن قدرزیاد انتخاب شودکه از سرمایه‌گذاری انجام شده و هزینه‌های عملیاتی مربوط به‌ارائهٔ خدمت استفادهٔ کامل به‌عمل نیاید. به‌عبارت دیگر، ظرفیت بهینهٔ سیستم ظرفیتی است که‌مجموع هزینه‌ها را حداقل کند. دریك سیستم، هزینه‌ها را به‌طور کلی می‌توان به‌دو گروه تقسیم کرد.

**الف. هزینهٔ خدمت‌دهی.** درهر سیستم، کاهش طول صف و زمان انتظار مشتری از طریق افزایش ظرفیت ارائهٔ خدمت آن امکانپذیر می‌شود. این کار مستلزم تقبل هزینه‌هایی است که صرف خرید ونصب تجهیزات جدید ویا صرف استخدام افراد اضافی برای ارائهٔ خدمت می‌گردد. مثلاً، برای افزایش ظرفیت تخلیهٔ یك‌بندر، اسکلهٔ جدیدساخته وتجهیزات لازم نظیر جرثقیلها اضافه شود و همزمان با آن به‌استخدام وآموزش افراد جدید اقدام گردد، که همهٔ این امور مستلزم هزینه‌های اضافی است. بنابراین، گسترش ظرفیت توأم با افزایش هزینهٔ بهره‌برداری، نگهداری، استهلاك وخسارت ناشی از رکود سرمایه‌است.

**ب. هزینهٔ اتلاف وقت درصف.** وقت مشتری از نظراقتصادی ـ اجتماعی ارزش دارد و اتلاف آن هزینه محسوب می‌شود. در سیستمهای مختلف و بسته به‌نوع مشتریها این ارزشها متفاوت است. برای نمونه، اتلاف ناشی از هرساعت انتظار کشتی درلنگرگاه

برای تخلیه یا بارگیری، هزینهٔ گزافی است که به‌صورت خسارت پرداخت می‌شود. عدم استفاده ازماشینی که در کارخانه خراب شده ومنتظر تعمیر است، باعث کاهش میزان تولید خواهد شد. علاوه براینها، در سیستمهای تجارتی، درانتظار گذاشتن بیش ازحد مشتری باعث ازدست دادن او وهمچنین ازدست‌دادن سودهای محتمل خواهد شد. دربیمارستان، اتلاف وقت مشتری (مریض) درصف ممکن است به‌قیمت جانش تمام شود.

بدیهی است که دونوع هزینهٔ فوق با یکدیگر هم جهت نیستند وافزایش یکی باعث کاهش دیگری می‌شود. بهینه‌سازی سیستم صف به‌معنای تعیین ظرفیت آن است، به‌طوری که مجموع هردونوع هزینه حداقل شود. بدیهی است که چون عوامل تعیین‌کنندهٔ هزینه ماهیت تصادفی دارند، تنها می‌توان میانگین هزینه‌ها را محاسبه وحداقل کرد.

همان‌طور که درفصلهای قبل مشاهده شد، تعیین ظرفیت سیستم خارج ازمقولهٔ تئوری صف است. درعمل ظرفیت بهینهٔ سیستم به‌این‌ترتیب تعیین می‌شود که، به‌فرض معلوم‌بودن پارامترهای آن، معیارهای ارزیابی (طول صف، زمان انتظار، ضریب بهره‌وری و...) مشخص و براساس آنها، دونوع هزینهٔ فوق را محاسبه می‌کنند. آن‌گاه، تأثیر تغییرات پارامترها برمعیارهای ارزیابی ودرنتیجه برهزینه‌های کل سیستم مجدداً بررسی می‌شود. تغییر پارامترها تا آنجا ادامه پیدا می‌کند، که بالاخره جوابی که هزینه‌ها را حداقل کند به‌دست آید.

## ۲.۹ تابع هزینه

هزینه‌های یك سیستم صف به‌طور کلی بستگی به نوع و ماهیت آن دارد. دراین بخش، بعضی ازانواع هزینه‌را، که درسیستمهای مختلف وجود دارد، تشریح می‌کنیم. مواردخاصی نیز وجود دارد که باید جداگانه آنها را بررسی کرد.

عمده‌ترین هزینه‌ها درسیستم صف عبارت‌اند از:

**الف. هزینهٔ نگهداری یك خدمت‌دهندهٔ بیکار درواحد زمان** ($C_1$). چون میانگین تعداد خدمت‌دهندگانی که مشغول ارائهٔ خدمت هستند، برابر با $(L-L_q)$ است، میانگین کل هزینهٔ نگهداری خدمت‌دهندگان بیکار برابر با $C_1(m-L+L_q)$ است، که در آن $m$ معرف تعداد خدمت‌دهندگان است.

**ب. هزینهٔ عملیاتی مربوط به‌یك خدمت‌دهنده که مشغول ارائهٔ خدمت است** ($C_2$). میانگین تعداد خدمت‌دهندگانی که مشغول ارائهٔ خدمت هستند، طبق آنچه که در بند الف گفتیم برابر با $(L-L_q)$ است و درنتیجه مقدار کل این نوع هزینه برابر با $C_2(L-L_q)$ است.

در بعضی ازسیستمها ممکن‌است $C_1$ با $C_2$ برابر باشد، اما لزوماً همیشه چنین نیست.

**هزینهٔ سرمایه‌گذاری روی یك خدمت دهنده یا ایجاد فضای سیستم در واحد زمان** ($C_3$). این هزینه شامل هزینهٔ استهلاك و بازگشت سرمایهٔ مصرف‌شده جهت تهیهٔ تجهیزات



وامکانات لازم برای ارائهٔ خدمت است. کل این هزینه‌ها درواحد زمان $C_3m$ است. (اگر $C_3$ مربوط به هزینهٔ ایجاد فضایی اضافی در سیستم باشد، کل هزینه به صورت $C_3K$ بیان می‌شود)

**د. هزینهٔ ازدست‌دادن‌مشتری** ($C_4$). این هزینه را سیستم موقعی متحمل می‌شود که به‌دلیل تکمیل ظرفیت یا اتخاذ سیاستهای دیگر ازورود یك مشتری جلوگیری به‌عمل آید، یا اینکه خود مشتری به‌علت تراکم ازورود به‌سیستم منصرف شود. اگر $\lambda$ آهنگ مراجعهٔ مشتریها و $\bar{\lambda}$ آهنگ ورود آنها به‌سیستم باشد، کل خسارتی که سیستم بابت ازدست‌دادن مشتری درواحد زمان متحمل می‌شود، برابر با $C_4(\lambda-\bar{\lambda})$ است.

**هـ. هزینهٔ اتلاف وقت مشتری درصف درواحد زمان** ($C_5$). کل هزینهٔ اتلاف وقت مشتریها درصف درواحد زمان برابر $C_5L_q$ است.

**و. هزینهٔ اتلاف وقت مشتری در هنگام دریافت خدمت درواحد زمان** ($C_6$). کل هزینهٔ اتلاف وقت‌مشتریهایی که‌درحال دریافت خدمت‌هستند، برابر با $C_6(L-L_q)$ است.

باید توجه داشت که در بسیاری ازموارد $C_5=C_6$ است؛ اما درمواردی میزان این دوهزینه متفاوت است. ضمناً بدیهی است که چهار هزینهٔ نوع اول هزینه‌های ارائهٔ خدمت ودونوع هزینهٔ آخرهزینه‌های مربوط به‌مشتری است. علاوه برهزینه‌های فوق، برحسب‌مورد و شرایط هزینه‌های متعدد دیگری نیز وجود دارند. مثلاً، دریك سیستم که ورود مشتریها به آن به‌صورت گروهی انجام می‌شود، ممکن است هر ورود گروهی هزینه‌ای را نیز در بر داشته باشد (مثلاً هزینهٔ حمل مشتریها یاهزینهٔ پذیرش وثبت اطلاعات). هزینه‌های بالاسری کل سیستم ونظایر اینها را نیز می‌توان نام برد. لیکن، باتوجه به‌تنوع سیستمهای صف ضروری است که‌درهنگام بررسی هرسیستم، هزینه‌های آن باتوجه به‌شرایط ویژه‌اش به‌طور مشخص مورد مطالعه‌قرارگیرد.

بدین‌ترتیب، باتوجه به‌مطالب فوق، درحالت کلی تابع هزینهٔ یك سیستم صف را می‌توان به‌شرح زیر بیان کرد.

$$C=C_1(m-L+L_q)+C_2(L-L_q)+C_3m+C_4(\lambda-\bar{\lambda})+C_5L_q+C_6(L-L_q) \qquad (۱.۹)$$

یا

$$C=(C_1+C_3)m+(-C_1+C_2+C_6)(L-L_q)+C_5L_q+C_4(\lambda-\bar{\lambda}) \qquad (۲.۹)$$

دربسیاری ازمدلها، تعدادی ازهزینه‌های فوق‌وجود ندارد. ضمناً همان‌طور که‌گفتیم بعضی ازسیستمها نیزهزینه‌های خاصی دارند، که به‌تابع فوق اضافه می‌شوند.

## ۳.۹ متغیرهای تصمیم در سیستمهای صف

هر سیستم صف، نظیر سایر سیستمها دارای پارامترهای قابل کنترلی است، که به آنها متغیر تصمیم می‌گویند. با تغییر و تنظیم این متغیرها، ظرفیت سیستم نیز تغییر می‌کند. متغیرهای تصمیم سیستم، طبیعتاً بستگی به نوع وماهیت آن دارد؛ لیکن، عمده‌ترین آنها را می‌توان به‌شرح زیر نام برد:

- تعداد خدمت‌دهندگان
- آهنگ خدمت‌دهی
- آهنگ ورود مشتریان
- ظرفیت صف
- جمعیت مشتریان

همان طور که مشاهده می‌کنیم، متغیرهای تصمیم فوق، عمدتاً همان ورودیهای سیستم هستند. بنابراین، چنانچه این ورودیها قابل کنترل باشند، ظرفیت سیستم را نیز می‌توان تغییرداد. درعمل ممکن است همزمان چند متغیر تصمیم را دراختیار داشته باشیم، که به‌این‌ترتیب در تغییر ظرفیت سیستم انعطاف‌پذیری بیشتری وجود خواهد داشت.

دراین بخش، طی مثالهایی نمونه‌های بهینه‌سازی را مورد بررسی قرارمی‌دهیم.

**مثال ۱.۹** تأثیر تغییرات درتعداد خدمت‌دهندگان برتابع هزینه درمدل $M/M/m$ را بررسی کنید.

حل: در این مدل، چون $\lambda$ و $\mu$ ثابت فرض می‌شود، لذا فقط هزینه‌هایی را منظور می‌کنیم که وابسته به‌تعداد خدمت‌دهندگان، یعنی $m$ باشد. ازطرف دیگر، طبق معادلهٔ بالای صفحهٔ ۱۳۹، $L-L_q=\lambda/\mu$ ومستقل از $m$ است. لذا تابع هزینه به‌شرح زیرخواهدبود.

$$C(m)=(C_1+C_2)m+C_5L_q \qquad (۳.۹)$$

که $C_1$ و $C_2$ و $C_5$، طبق تعاریف بخش قبل به‌ترتیب معرف هزینهٔ نگهداری خدمت‌دهندهٔ بیکار، هزینهٔ سرمایه‌گذاری روی یك خدمت‌دهنده وهزینهٔ اتلاف وقت مشتری درصف است. هزینه‌های مستقل از $m$، از تابع هزینه حذف شده است. برای تعیین $m$، تهیهٔ جدولی به‌شرح زیرلازم است.

| $C(m)$ | $L_q$ | $\pi_0$ | $m$ |
|---|---|---|---|
| | | | |

از جدول فوق، مقادیر $C(m)$ به‌ازای مقادیر مختلف $m$ به‌دست می‌آید. بدین‌ترتیب، مقدار بهینهٔ $m$ نیز مشخص می‌شود. بدیهی است که حداقل مقدار $m$ باید طوری



باشد که $\rho<1$ شود. از طرفی، درجدول فوق حداکثر مقدار $m$ نیز محدود خواهد بود، زیرا نشان داده می‌شود که با افزایش $m$ ابتدا هزینهٔ کل $C(m)$ کاهش می‌یابد و از آن‌پس شروع به افزایش می‌کند. به عبارت دیگر، با افزودن تعداد خدمت‌دهنده‌ها ابتدا کاهش هزینه‌های مربوط به‌مشتریان قابل توجه‌است، اما به‌تدریج آهنگ کاهش آن نسبت به‌افزایش هزینهٔ خدمت‌دهی کمتر می‌شود. بدین‌ترتیب، افزایش $m$ تا آنجا ادامه می‌یابد، که کل هزینه‌ها رو به‌کاهش باشد و به‌محض اینکه افزایش آن شروع شد، متوقف می‌شود.

**مثال ۲.۹** تعداد بهینهٔ خدمت‌دهندگان را دریك‌مدل $M/M/m$، که درآن $\lambda=15$ و $\mu=10$ است، تعیین کنید. فرض می‌کنیم که هزینهٔ هرساعت وقت خدمت‌دهنده ۱۲۰ و هزینهٔ هر ساعت وقت مشتری ۳۶۰ باشد. (فرض براین است که برای افزایش تعداد خدمت‌دهندگان احتیاج به‌سرمایه‌گذاری نیست ولذا $C_2=0$ است).

حل: دراین‌مدل چون‌مقدار $\rho$ باید کوچکتر از ۱ باشد، حداقل تعدادخدمت‌دهندگان $m=2$ است. جدول زیر را تهیه می‌کنیم

| $L_q$ | $C(m)$ | $\pi_0$ | $m$ |
|---|---|---|---|
| ۱٫۹۲۸۵ | ۹۳۴٫۲۸ | ۰٫۱۳۲۸۵ | ۲ |
| ۰٫۲۳۶۸ | ۲۲۵٫۳ | ۰٫۲۱۰۳ | ۳ |
| ۰٫۰۲۲۷ | ۲۹۶٫۱ | ۰٫۲۲۱ | ۴ |

همان‌طور که مشاهده می‌شود، تعداد بهینهٔ خدمت‌دهندگان برابر با ۳ است.

**مثال ۳.۹** دریك مدل $M/M/m/K$، تأثیر تغییر همزمان $m$ و $K$ را تعیین کنید.

حل: دراین مدل برای افزایش ظرفیت خدمت دهی می‌توان هم تعداد خدمت‌دهنده وهم فضای سیستم را افزایش داد. برای به‌دست‌آوردن تابع هزینه، رابطهٔ (۱.۹)، باید توجه‌کرد که $L-L_q=\bar{\lambda}/\mu$ است، که $\bar{\lambda}$ معرف آهنگ ورود مشتریان (ونه آهنگ ورود مراجعین) است. از طرف دیگر $\bar{\lambda}$ خود تابعی از $K$ است. بنابراین، درتابع هزینهٔ این مدل، (تابع ۲.۹)، باید $\lambda-\bar{\lambda}$ را مساوی $\pi_K$ وهزینهٔ سرمایه‌گذاری را $C_2K$ (به‌جای $C_2m$) درنظر گرفت.

مقادیر بهینهٔ $m$ و $K$ را از راه جستجو می‌توان به‌دست آورد. با توجه به‌شرایط، معمولا افزایش $K$ بیش ازمقدار معین مقدور نیست؛ لذا، اگرحداکثر آن را با $\bar{K}$ نشان دهیم، با توجه به‌اینکه $m\leqslant K$ است، جدولی به‌شرح زیرتهیه می‌کنیم، که عناصر جدول $C(m,K)$ است.

| $K/m$ | ۱ | ۲ | .... | $\bar{K}$ | $K^*$ | $C(m,K^*)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |

در این جدول، $K^*$ معرف ظرفیت بهینهٔ سیستم به‌ازای مقدار ثابت $m$ و $C(m,K^*)$ نشاندهندهٔ حداقل کل هزینه‌های سیستم است. به فرض اینکه تعداد خدمت‌دهندگان برابر با $m$ باشد. سپس، حداقل مقادیر $C(m,K^*)$ از ستون آخر جدول به‌دست می‌آید، که به‌این‌ترتیب مقادیر بهینهٔ $m$ و $K$ مشخص می‌شود.

**مثال ۴.۹** یک کارگاه تولیدی را درنظر بگیرید، که کارهای سفارشی مشتریان را می‌پذیرد. به‌علت محدودیت فضای انبار، حداکثر تعداد مشتریهایی که پذیرفته می‌شوند، محدود است. هدف، تعیین تعداد ماشینهایی که سفارشات مشتریان با آن انجام می‌شود و همچنین تعیین ظرفیت سیستم است، به‌طوری که هزینه‌ها حداقل شود. مدت‌زمان خدمت دارای توزیع نمایی بامیانگین ۱۵ دقیقه و ورود مشتریها طبق فرایند پواسون بامیانگین هر ساعت ۱۶ مشتری است. هزینه‌های مختلف به‌شرح زیراست

هزینهٔ ایجاد یک واحد ظرفیت سیستم (درواحد زمان): $C_3 = 10$

(افزایش فضا برای نگهداری یک مشتری جدید)

هزینهٔ عدم استفاده ازیک ماشین درواحد زمان: $C_1 = 100$

هزینهٔ عملیاتی یک ماشین درواحد زمان: $C_2 = 200$

سود حاصل ازانجام کار مشتری (یا خسارت ازدست دادن مشتری): $C_4 = 300$

خسارت حاصل ازتأخیر درانجام کار مشتری (درواحد زمان): $C_5 = C_6 = 150$

حل: تابع هزینهٔ این مدل عبارت است از:

$$C(m,K) = 100\,m + 10\,K + 250(L - L_q) + 150 L_q + 2800\pi_0$$

ازطرف دیگر،

$$L - L_q = \frac{\bar{\lambda}}{\mu} = \frac{\lambda(1-\pi_0)}{\mu} = \frac{16}{2}(1-\pi_0) = 2 - 2\pi_0$$

درنتیجه

$$C(m,K) = 100\,m + 10\,K + 150\,L_q + 3800\pi_0 + 1000$$

| $K/m$ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | ۷ | ۸ | ۹ | ۱۰ | ۱۱ | ۱۲ | بهینه $K^*$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ۲ | ۲۵۵۸ | ۲۴۰۹ | ۲۲۳۰ | ۲۵۲۲ | ۲۶۲۷ | ۲۷۸۹ | ۲۹۲۰ | ۳۰۹۵ | ۳۲۵۲ | ... | ... | ۳ |
| ۳ | — | ۲۰۲۲ | ۱۸۲۲ | ۱۷۵۵ | ۱۷۶۳ | ۱۸۱۶ | ۱۸۹۷ | ۱۹۹۷ | ۲۱۱۱ | ... | ... | ۵ |
| ۴ | — | — | ۱۶۲۰ | ۱۳۸۶ | ۱۲۷۴ | ۱۲۲۶ | ۱۲۱۴ | ۱۲۲۶ | ۱۲۵۲ | ۱۲۹۳ | ۱۳۲۲ | ۸ |
| ۵ | — | — | — | ۱۳۰۶ | ۱۱۰۳ | ۹۹۲ | ۹۳۷ | ۹۰۷ | ۸۹۵ | ۸۹۴ | ۹۰۸ | ۱۱ |
| ۶ | — | — | — | — | ۱۱۰۵ | ۹۵۶ | ۸۷۹ | ۸۲۰ | ۸۲۲ | ۸۱۵ | ۸۱۶ | ۱۱ |
| ۷ | — | — | — | — | — | ۱۰۰۸ | ۹۱۷ | ۸۷۵ | ۸۵۷ | ۸۵۳ | ۸۵۵ | ۱۱ |
| ۸ | — | — | — | — | — | — | ۹۹۶ | ۹۲۹ | ۹۳۲ | ۹۳۰ | ۹۳۲ | ۱۱ |

عدد ۱۰۰۰ را می‌توان از تابع هزینه حذف کرد، چون متغیرهای تصمیم بر آن تأثیری ندارند. با استفاده از جدول زیر، تأثیر تغییرات $m$ و $K$ بر تابع هزینه بررسی می‌شود.

همان‌طور که مشاهده می‌شود، حداقل هزینه به‌ازای $m=۶$ و $K=۱۱$ حاصل می‌شود و مقدار هزینهٔ بهینه برابر با ۸۱۵ است.

**مثال ۵.۹** در یک کارخانه که دارای ۳۰ ماشین است، هدف تعیین تعداد بهینهٔ تعمیرکاران است. مدت‌زمان تعمیر هر ماشین دارای توزیع نمایی با میانگین ۳ ساعت و مدت‌زمانی که ماشین کار می‌کند (قبل از اینکه خراب شود) نیز دارای توزیع نمایی با میانگین ۲۲۰ ساعت است. خسارت قطع تولید هر ماشین ساعتی ۱۰۰۰ تومان و حقوق هر ساعت کار تعمیرکار را ۳۰۰ تومان فرض می‌کنیم.

حل: در این مدل $C=۳۰$، $\mu=۱/۳۰$ و $\lambda=۱/۲۲۰$ و $C_۱=C_۲=۳۰۰$ و $C_۵=C_۶=۱۰۰۰$ و $C_۳=C_۴=۰$ است. لذا تابع هزینه عبارت است از:

$$C(m)=۳۰۰m+۱۰۰۰L$$

برای تعیین $m$ از جدول زیر استفاده می‌کنیم

| $m$ | $\pi_۰$ | $L$ | $C(m)$ |
|---|---|---|---|
| ۳ | ۰٫۰۴ | ۶٫۹۶ | ۷۸۶۲ |
| ۴ | ۰٫۱۶۸ | ۳٫۳۷ | ۴۵۶۹ |
| ۵ | ۰٫۳ | ۱٫۹۷ | ۳۴۷۲ |
| ۶ | ۰٫۴ | ۱٫۳۴ | ۳۱۲۴ |
| ۷ | ۰٫۲۸ | ۱٫۰۰۷ | ۳۱۰۷ |
| ۸ | ۰٫۵۴ | ۰٫۸ | ۳۴۰۱ |

همان‌طور که مشاهده می‌شود، حداقل هزینه به‌ازای $m=۷$ به‌دست می‌آید.

**مثال ۶.۹** در طراحی یک پارکینگ، هدف، تعیین فضای آن است. موقعی که ظرفیت پارکینگ تکمیل باشد، اتومبیلها به پارکینگهای دیگر می‌روند و این پارکینگ از سود حاصله محروم خواهد شد. اتومبیلها طبق فرایند پواسون با میانگین هر ساعت ۴۰ دستگاه وارد می‌شوند. مدت توقف هر اتومبیل دارای توزیع نمایی با میانگین نیم‌ساعت است. هزینهٔ ایجاد فضا برای پارک اتومبیل (در واحد زمان) برابر با ۲ و سود حاصله در هر ساعت برابر با ۵ است.



حل: این مسئله، یک مدل $M/M/m/m$ یا مدل ارلانگی است. در این مدل، $\lambda=۴۰$، $\mu=۲$، $C_۳=۲$ و $C_۴=۵$ و $C_۱=C_۲=C_۵=C_۶=۰$ است. تابع هزینه در این مدل به‌شرح زیر است:

$$C(m)=۲m+۲۰۰\pi_m$$

برای به‌دست آوردن $m$ از جدول زیر استفاده می‌کنیم.

| $m$ | $\pi_m$ | $C(m)$ |
|---|---|---|
| ۲۵ | ۰٫۰۵ | ۶۰٫۱ |
| ۲۶ | ۰٫۰۳۷ | ۵۹٫۴۳ |
| ۲۷ | ۰٫۰۲۶ | ۵۹٫۳۶ |
| ۲۸ | ۰٫۰۱۸ | ۵۹٫۷۵ |

بنابراین، تعداد بهینهٔ اتومبیل در پارکینگ برابر با ۲۷ است.

**مثال ۷.۹** در یک مدل $M/M/۱$، خدمت‌دهنده ماشینی است که می‌توان سرعت آن را تنظیم کرد. اگر آهنگ خدمت را $\mu$ فرض کنیم، هزینهٔ عملیاتی و همچنین هزینهٔ بیکاری هر ماشین بستگی به $\mu$ دارد، که آن را با $f(\mu)$ نشان می‌دهیم.

حل: با توجه به اینکه تنها متغیر تصمیم در این مدل $\mu$ است، تابع هزینهٔ مربوط به‌شرح زیر خواهد بود:

$$C(\mu)=f(\mu)+C_۵L_q+C_۶(L-L_q)$$

به‌جای $L$ و $L_q$ مقادیر مربوطه را جایگزین می‌کنیم، در نتیجه

$$C(\mu)=f(\mu)+\frac{C_۵\lambda^۲}{\mu(\mu-\lambda)}+C_۶\frac{\lambda}{\mu}$$

برای به‌دست آوردن حداقل آن، از رابطهٔ فوق مشتق‌گیری می‌کنیم (به‌شرط اینکه $C(\mu)$ قابل مشتق‌گیری باشد). در نتیجه،

$$\frac{dC(\mu)}{d\mu}=f'(\mu)-\frac{C_۵\lambda^۲(۲\mu-\lambda)}{\mu^۲(\mu-\lambda)^۲}-\frac{C_۶\lambda}{\mu^۲}=۰$$

در حالت خاص که $C_۵=C_۶$ باشد، نتیجه می‌شود که به‌ازای مقدار بهینهٔ $\mu$

$$f'(\mu)=\frac{C_۵\lambda}{(\mu-\lambda)^۲}$$

$f(\mu)=a\mu+b$

اگر $f(\mu)$ تابعی خطی از $\mu$، مثلاً $f(\mu)=a\mu+b$ باشد،

$$a=\frac{C_0\lambda}{(\mu-\lambda)^2}$$

که به‌این‌ترتیب مقدار بهینهٔ $\mu$ به‌دست می‌آید.

$$\mu^*=\lambda+\sqrt{\frac{C_0\lambda}{a}} \qquad (۴.۹)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، دراین مدل $\mu^*>\lambda$، یعنی $\rho<1$ است.

**مثال ۸.۹** دریك خط تولید، سرعت ماشینی را می‌توان تغییر داد. تعداد قطعات تولید شده با این ماشین بین ۶۰ تا ۹۰ قطعه درساعت است. هزینهٔ ادارهٔ این ماشین هر ساعت ۲۰۰۰ تومان است، به‌شرط اینکه باحداقل سرعت کار کند. ولی چنانچه سرعت آن افزایش یابد، هزینه نیز متناسباً وبا رابطه‌ای خطی افزایش خواهد یافت. هزینهٔ ادارهٔ این ماشین باحداکثر سرعت برابر با ۲۶۰۰ تومان است. اگر تعداد قطعاتی که برای تولید سفارش می‌شود، طبق توزیع پواسون با میانگین ۵۰ قطعه در ساعت، وخسارت حاصل از تأخیر کار درهرساعت برابر با ۲۵۰ تومان باشد، سرعت بهینهٔ ماشین را تعیین کنید.

حل: دراین مدل $f(\mu)=۲۰\mu+۸۰۰$ است.

به‌این‌ترتیب، $a=۲۰$، $b=۸۰۰$ و $\lambda=۵۰$ و $C_0=۲۵۰$ است. طبق رابطهٔ (۴.۹)

$$\mu^*=۷۵$$

## ۴.۹ انتخاب محل سیستم صف

فرض کنید جمعیت مشتریان بالقوهٔ یك سیستم در منطقه‌ای پراکنده باشند. رفت و برگشت این مشتریان مستلزم صرف‌وقت ودر نتیجه هزینه‌است. هدف، تعیین محل یا محلهای مناسب استقرار سیستم است، به‌طوری که کلّ هزینه‌ها، که شامل هزینهٔ رفت و برگشت مشتریان نیز می‌شود، حداقل شود. بنابراین، برای محاسبهٔ میزان هزینه، لازم است که میانگین زمان رفت وبرگشت مشتریان نیز تعیین گردد.

### توزیع جمعیت مشتریان

فرض می‌شود که متقاضیان دریافت خدمت (مشتریان)، در منطقهٔ موردنظر به‌طور یکنواخت پراکنده هستند.



### معیار تعیین فاصله

دونقطهٔ هندسی $A$ و $B$ با مختصات $(a, b)$ و $(a', b')$ را درنظر بگیرید. فاصلهٔ بین این دونقطه را برحسب نیاز وشرایط، با معیارهای مختلف می‌توان اندازه‌گیری کرد. دومعیار مهم اندازه‌گیری فاصله عبارت‌اند از:

الف. فاصلهٔ هندسی بین دونقطه، یعنی

$$d=[(a-a')^2+(b-b')^2]^{0.5}$$

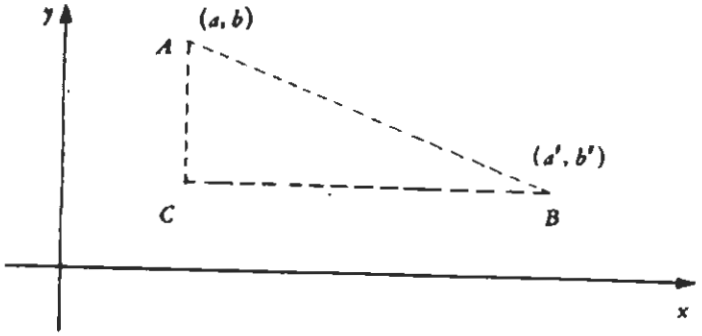
(درشکل ۱.۹، فاصلهٔ مستقیم $AB$، معرف فاصلهٔ هندسی است.)

ب. فاصلهٔ خطی که فرض می‌شود، مشتری در امتداد محورهای مختصات حرکت می‌کند. برای نمونه، دریك شهررفت وآمد درامتداد خیابانها ویا دریك کارخانه‌درامتداد جاده‌ها ومسیرهای مشخص انجام می‌شود. درشکل ۱.۹، فاصلهٔ خطی بین دونقطهٔ $A$ و $B$ عبارت ازمجموع فواصل $AC$ و $CB$ وبرابراست با

$$d=|X|+|Y|=|a-a'|+|b-b'|$$

که $|X|$، فاصله درامتداد محور $x$ ها و $|Y|$، فاصله درامتداد محور $y$ هاست؛ یعنی، برای محاسبهٔ $|X|$، که میانگین فاصلهٔ یك مشتری تا مبدأ مختصات درامتداد محور $x$ هاست، از رابطهٔ احتمال شرطی استفاده می‌کنیم. بادرنظرگرفتن اینکه‌مشتریان، طبق توزیع‌یکنواخت درداخل مستطیل پراکنده‌اند، احتمال اینکه یك مشتری درسمت راست یا چپ محور $y$ ها قرارداشته باشد، به‌ترتیب برابر با $a/a+b$ و $b/a+b$ است. از طرف دیگر، میانگین فاصلهٔ‌طی‌شده توسط‌مشتری سمت‌راست وچپ محور $y$ ها، به‌ترتیب $a/2$ و $b/2$ است؛ لذا،

$$|X|=\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{a+b}+\frac{b}{2}\cdot\frac{b}{a+b}=\frac{a^2+b^2}{2(a+b)} \qquad (۵.۹)$$




شکل ۱.۹ فاصلهٔ هندسی وخطی بین دونقطه

به‌همین ترتیب،

$$|Y| = \frac{c^2+d^2}{2(c+d)}$$

ومیانگین فاصلهٔ رفت وبرگشت هرمشتری عبارت است از:

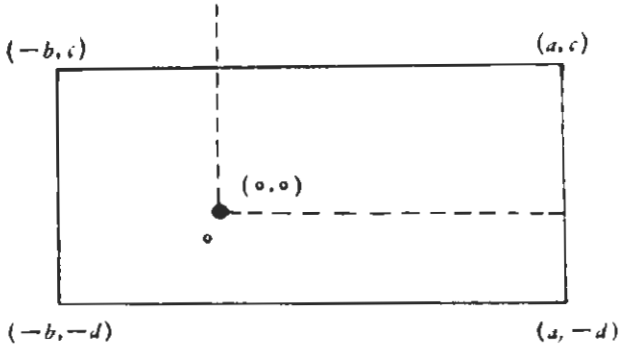
$$E(T) = 2|X| + 2|Y| = \frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{c^2+d^2}{c+b}$$

چنانچه تعیین‌محل ایستگاه خدمت مدنظر باشد، باید $a$ و $b$ و $c$ و $d$ را طوری تعیین کرد که $E(T)$ حداقل شود. باید‌توجه داشت که $a+b$ برابر با $|X| = CB$ و $|Y| = AC$ است. علت به‌کارگرفتن قدرمطلق نیز مثبت بودن فاصله‌هاست.

**مثال ۹.۹** فرض کنید مشتریان یك‌سیستم درداخل یك مستطیل، طبق توزیع یکنواخت پراکنده‌اند. ایستگاه‌خدمت درنقطه‌ای درداخل این مستطیل قراردارد. میانگین فاصلهٔ رفت وبرگشت یك مشتری را به‌دست آورید. اگر هدف، حداقل کردن این کمیت باشد، بهترین نقطهٔ استقرار ایستگاه خدمت کجاست؟

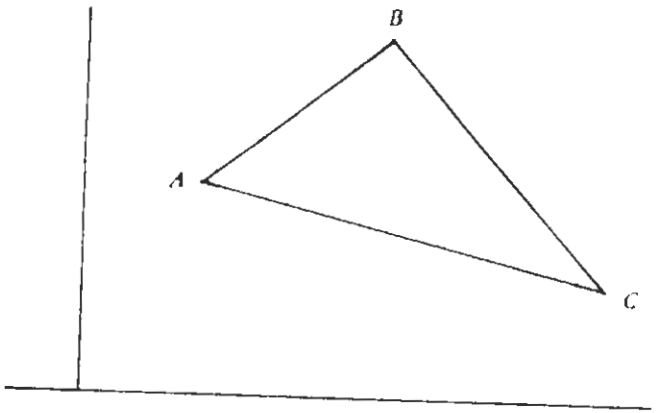
حل: ایستگاه خدمت‌را به‌عنوان‌مبدأ مختصات جدیدتعیین‌می‌کنیم.مختصات گوشه‌های مستطیل روی شکل نشان داده شده است. حال فرض کنید، یك مشتری مشخص درنقطه‌ای به‌مختصات $(x, y)$ قرار گرفته باشد. مسافت خطی که‌این مشتری باید درامتداد محور $x$ها طی‌کند، برابر با $|x|$ (طول مستطیل)، و $c+d$ برابر با عرض مستطیل و ثابت است، لذا $E(T)$ به‌ازای $a=b$ و $c=d$ حداقل می‌شود. به‌عبارت دیگر، بهترین نقطه برای استقرار ایستگاه خدمت، مرکز مستطیل است.

**مثال ۱۰.۹** جمعیت‌مشتریان درداخل‌مثلث $ABC$، طبق‌توزیع یکنواخت پراکنده‌اند. اگر ایستگاه خدمت، درنقطه‌ای خارج ازمثلث قرار گرفته باشد، میانگین فاصلهٔ خطی هر مشتری تا ایستگاه خدمت را محاسبه کنید.




**شکل ۲.۹** مربوط به‌مثال ۹.۹






**شکل ۳.۹** پراکندگی مشتریان مثال ۱۰.۹

حل: ایستگاه‌خدمت را به‌عنوان مبدأ مختصات‌انتخاب می‌کنیم.مختصات‌رئوس‌مثلث نسبت به‌این مبدأ مختصات $(a, a')$ و $(b, b')$ و $(c, c')$ خواهد بود. اگرمیانگین فاصلهٔ خطی هر مشتری تا مبدأ مختصات را با استفاده ازاحتمال شرطی به‌دست‌آوریم، به‌سادگی معلوم می‌شود که می‌توان فرض کرد که تمام مشتریها درمرکز ثقل مثلث (در محل تقاطع میانه‌ها)قراردارند، که فاصلهٔ آن تاهررأس دو برابرفاصلهٔ آن تاضلع مقابل مربوط به‌همان رأس است. لذا دراین مثال‌مختصات‌نقطهٔ‌تقاطع میانه برابر است با $(a'+b'+c')/3$ و درنتیجه، میانگین‌فاصلهٔ مشتری تا ایستگاه خدمت (مبدأ مختصات) $(a+b+c)/3$ برابراست با:

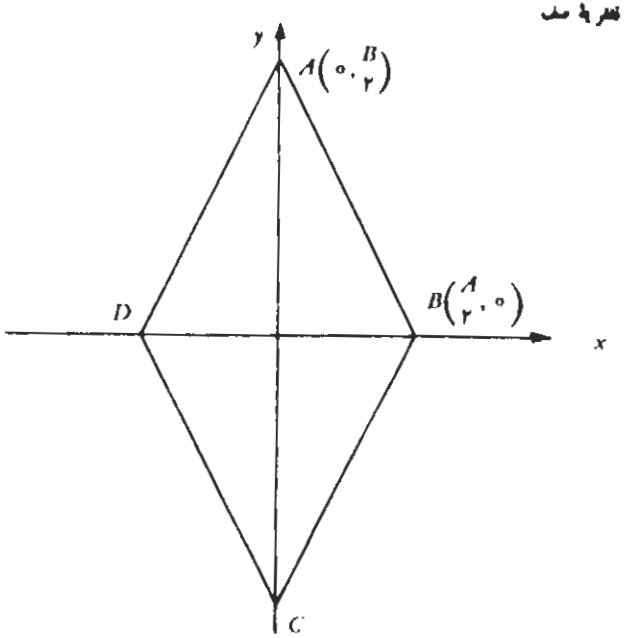
$$\left[\frac{a+b+c}{3}, \frac{a'+b'+c'}{3}\right]$$

$$|X| + |Y| = \frac{1}{3}(a+b+c+a'+b'+c')$$

**مثال ۱۱.۹** مشتریان یك‌سیستم صف به‌طور یکنواخت درداخل یك‌لوزی باقطرهایی به‌طول $A$ و $B$، مطابق شکل ۴.۹ پراکنده‌اند وایستگاه خدمت مربوط به‌آن نیز در مرکز لوزی قراردارد. میانگین فاصلهٔ هرمشتری تا ایستگاه خدمت را به‌دست‌آورید.

حل: دراینجا نیزمبدأ مختصات را برایستگاه خدمت منطبق می‌کنیم. مختصات‌رئوس لوزی در شکل نشان داده شده است. برای محاسبهٔ $|X|$، از احتمال شرطی استفاده می‌کنیم. مشتریها یا درسمت راست محور $y$ها (یعنی درمثلث $ABC$) ویا درسمت چپ آن (یعنی درمثلث $ADC$) قراردارند. مساحت این دومثلث باهم برابراست، ولذا مشتری با احتمال ۰٫۵ می‌تواند در هر کدام ازمثلثها قرارداشته باشد. میانگین فاصلهٔ مرکز ثقل هر مثلث تا مبدأ مختصات، درامتداد محور $x$ها برابربا $A/6$ است. به‌این‌ترتیب

$$|X| = \frac{1}{2} \times \frac{A}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{A}{6} = \frac{A}{6}$$




**شکل ۴.۹** پراکندگی مشتریان، مثال ۱۱.۹

به‌همین ترتیب، $|Y|$ به‌دست می‌آید. لذا،

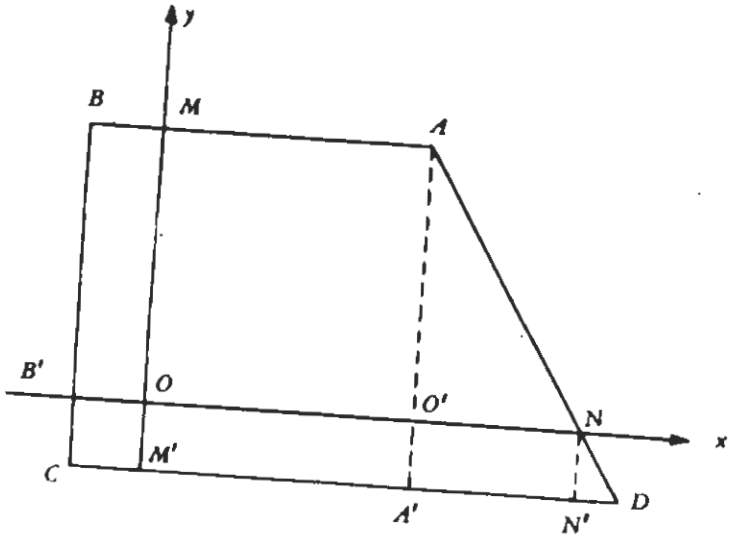
$$|X|+|Y|=\frac{A+B}{6}$$

باید توجه داشت که در این مثال نمی‌توان فرض کرد که مرکز ثقل همهٔ مشتریها در مرکز لوزی قرار دارد، زیرا جهت حرکت مشتریها در دو مثلث با یکدیگر متفاوت است. و اگر کل لوزی را یکجا در نظر بگیریم، جهت حرکت مخالف مشتریها، باعث می‌شود که میانگین فاصلهٔ آنها برابر با صفر شود، که این امر صحیح نیست.

**مثال ۱۲.۹** مشتریهای یك سیستم صف داخل ذوزنقه $ABCD$ پراکنده‌اند و ایستگاه خدمت در داخل آن، مطابق شکل ۵.۹ قرار دارد. مختصات رئوس ذوزنقه (۵، ۲)، (۲، ۲−) و (۱−، ۲−) و (۱−، ۷) است. میانگین فاصلهٔ هر مشتری تا ایستگاه خدمت را به‌دست آورید.

حل: برای محاسبهٔ $|X|$ از احتمال شرطی استفاده می‌کنیم. مشتریها یا در مستطیل $BCM'M$ یا در مستطیل $MM'A'A$ و یا در مثلث $AA'D$ قرار دارند. احتمال بودن یك مشتری در هر کدام از این سه قسمت، متناسب با مساحت آنها یعنی ۶/۲۴ و ۱۵/۲۴ و ۳/۲۴ است. میانگین فاصلهٔ افقی مرکز ثقل این سه قسمت تا مبدأ مختصات به‌ترتیب برابر با ۱، ۲٫۵ و ۱۷/۳ است. به‌این ترتیب،






**شکل ۵.۹** پراکندگی مشتریان مثال ۱۲.۹

$$|X|=\frac{6}{24}(1)+\frac{15}{24}(2.5)+\frac{3}{24}\left(\frac{17}{3}\right)=2.52$$

به‌همین ترتیب، برای محاسبهٔ $|Y|$، ذوزنقه را به چهار قسمت تقسیم می‌کنیم، که عبارت‌اند از: مستطیل $B'BAO'$، مستطیل $B'CN'N$، مثلث $AO'N$ و مثلث $NND$. احتمال بودن مشتریها در این قسمتها به‌ترتیب برابر با ۱۴/۲۴، ۳۵/۷۲، ۴/۷۲، ۱/۷۲ است. میانگین فاصلهٔ عمودی مرکز ثقل این قسمتها با مبدأ مختصات به‌ترتیب برابر با ۱ و ۰٫۵ و ۲/۳ و ۲/۳ است. لذا

$$|Y|=\frac{14}{24}(1)+\frac{25}{72}(0.5)+\frac{4}{72}\left(\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{72}\left(\frac{2}{3}\right)=0.803$$

**مثال ۱۳.۹** در سطح یك شهر بزرگ، که جمعیت آن به‌طور یکنواخت پراکنده است، می‌خواهیم تعدادی ایستگاههای خدمت مشابه ایجاد کنیم. منطقهٔ تحت پوشش هر ایستگاه دارای مساحتی برابر با $S$ است و می‌تواند مربع یا لوزی (با قطرهای مساوی) باشد. میانگین فاصلهٔ یك مشتری تا مرکز خدمت در کدام از دو شکل فوق‌الذکر کمتر است.

حل: چون مساحت هر منطقه برابر با $S$ است؛ لذا، طول هر ضلع مربع برابر با $\sqrt{S}$ و طول هر قطر لوزی برابر با $\sqrt{2S}$ است. طبق نتایج مثال ۹.۹، در مورد مربع،

$$|X|+|Y|=\frac{\sqrt{S}}{2}$$

وطبق نتیجهٔ مثال ۱۱.۹، در مربع داریم

$$|X|+|Y|=\frac{\sqrt{2S}}{3}$$

همان طور که مشاهده می‌شود، میانگین فاصلهٔ طی‌شده توسط یك مشتری درمنطقه‌ای به‌شکل لوزی کمتر ازهمین فاصله درمنطقه‌ای به‌شکل مربع است.

درحالت کلی ثابت می‌شود که اگر بخواهیم منطقهٔ بزرگی را به‌مناطق کوچکتر تقسیم ودر هر کدام یك ایستگاه خدمت مستقر کنیم، بهترین روش این است که منطقه را به‌تعدادی مناطق کوچکتر به‌شکل لوزی تقسیم کنیم و ایستگاههای خدمت درمراکز این‌لوزیها قرار گیرد. ضمناً اگرمعیارسنجش فاصلهٔ هندسی باشد، منطقه را باید به‌تعدادی دایره تقسیم کرد.

## مسائل

۱. درمسئلهٔ ۲۷ فصل ۶، اگرحقوق تعمیرکارساعتی ۳۰۰ تومان وهزینهٔ قطع تولید به‌ازای هرماشین ـ ساعت ۲۰۰۰ تومان باشد، تعداد بهینهٔ ماشینهای تحت مسئولیت این تعمیرکار چقدر است؟

۲. درانبار ابزار یك کارخانه $M$ نفرکار می‌کنند. مدت‌زمانی که هرکارمند انبار برای بررسی و تحویل ابزار صرف می‌کند، متغیری تصادفی با توزیع نمایی و با میانگین ۸ر۵ دقیقه‌است. میانگین فاصلهٔ زمانی بین دومتقاضی ابزار، که طبق توزیع نمایی فرض‌می‌شود، ۵ر۱ دقیقه‌است. حقوق ومایرهزینه‌های مربوط به‌هرکارمند ۱۵۰ تومان درساعت وحقوق تکنیسینهایی‌که مراجعه می‌کنند (وهزینه‌های ناشی از تعطیل‌کار آنها) ۳۰۰ تومان درساعت فرض می‌شود. مقدار بهینهٔ $M$ را تعیین کنید.

۳. دریك سیستم صف، که ورود مشتریها طبق‌فرایند پواسون بامیانگین هرساعت ۱۰مشتری است، یکی ازدوخدمت‌دهنده را می‌توان استخدام کرد، که دستمزدآنها به‌ترتیب ساعتی ۷۰ و ۹۰ تومان است. مدت زمان خدمت توسط خدمت‌دهندهٔ اول و دوم به‌ترتیب دارای توزیع نمایی (بامیانگین ۴ دقیقه) وتوزیع نرمال (بامیانگین ۳ دقیقه و انحراف معیار ۱ دقیقه) است. هزینهٔ وقت مشتری هر ساعت ۱۲۰ تومان است. کدام خدمت‌دهنده مناسبتر است؟

۴. دریك کارخانه، هرماشین مدتی‌کار می‌کند وبعد ازآن احتیاج به‌تعمیردارد. مدت‌زمان کارکردن وهمچنین تعمیرآن متغیرهای تصادفی نمایی با میانگین به‌ترتیب، ۸ ساعت و۴۵ دقیقه است. هزینهٔ نگهداری هرماشین بسته به اینکه درحال کار یا درحال تعمیر باشد، به‌ترتیب ۱۵۰۰ تومان و ۸۰۰ تومان است. تعداد بهینهٔ ماشینهایی که یك‌نفرکارگر مسئول تعمیر آنهاست، چقدراست؟ اگر کلاً ۲۰ ماشین وجودداشته‌باشد ویك کارگرمسئول‌ماشینهای



مشخصی‌باشد، بلکه هرکارگربتواند به‌تعمیر هرماشین خراب بپردازد، تعداد بهینهٔ کارگران موردنیاز را تعیین کنید:

۵. درمسئلهٔ ۴، اگر هزینهٔ نگهداری هر ماشین، صرف‌نظر ازاینکه کاربکند یا نکند، برابر با ۱۵۰۰ تومان باشد، به سؤالات مطرح‌شده دربالا مجدداً پاسخ دهید.

۶. دریك سیستم صف مشتریها طبق‌فرایند پواسون (بامیانگین هرساعت ۱۲ مشتری) وارد می‌شوند. مدت‌زمان خدمت دارای‌توزیع نرمال (بامیانگین ۴ دقیقه وانحراف معیار ۵ر۱ دقیقه) است. هرساعت وقت مشتری ۲ برابر وقت خدمت‌دهنده ارزش دارد. تعداد بهینهٔ خدمت‌دهندگان را طوری تعیین کنید که کل هزینه‌ها حداقل شود.

۷. می‌خواهیم تعداد بهینهٔ‌ماشینهای فتوکپی موردنیازمؤسسه‌ای را تعیین کنیم. تعدادکارهای فتوکپی این مؤسسه دارای‌توزیع پواسون (بامیانگین هرساعت ۶۰ کار) ومدت‌زمان چاپ هرکاری دارای توزیع‌نمایی با میانگین ۱۰ دقیقه است. هزینهٔ نگهداری هرماشین، شامل استهلاك وحقوق متصدی ماشین هرساعت ۵۰۰ تومان ومستقل ازتعداد کار چاپ شده با ماشین است. میانگین هزینهٔ کاغذ و سایر هزینه‌های متغیر هرکار برابربا ۴۰ تومان است. چنانچه‌کاری برسد و ماشین فتوکپی بیکار نباشد، بلافاصله به‌صورت سفارش به‌بیرون از مؤسسه ارسال می‌شود. میانگین هزینهٔ هرکار فتوکپی درخارج ازمؤسسه ۱۸۰ تومان‌است. باهدف حداقل‌کردن هزینه، چند ماشین فتوکپی لازم است؟

۸. درمسئلهٔ ۷، اگر مدت‌زمان چاپ دارای توزیع یکنواخت درفاصلهٔ (۸, ۱۲) باشد، به‌سؤال مطرح‌شده مجدداً پاسخ دهید.

۹. به‌یك بندرهرروز به‌طورمتوسط ۵ کشتی طبق توزیع پواسون وارد می‌شوند. هزینه‌های روزانهٔ مربوط به‌یك اسکله برابربا نصف خسارت روزانه‌ای‌است که به‌یك کشتی، که‌منتظر تخلیه است، پرداخت می‌شود (بابت زمان تخلیه، خسارتی پرداخت نمی‌شود). مدت‌زمان تخلیهٔ هرکشتی دارای توزیع نمایی با میانگین یك روزاست. تعداد بهینهٔ اسکلهٔ موردنیاز این بندر را تعیین کنید.

۱۰. به‌یك پمپ‌بنزین هر ساعت، به‌طور متوسط ۱۲۰ اتومبیل طبق فرایند پواسون مراجعه می‌کنند. مدت زمان خدمت، نمایی با میانگین ۳۰ دقیقه فرض می‌شود. سود حاصل از فروش بنزین به‌هر اتومبیل ۲۰ تومان وهزینه هردستگاه ~~اتومبیل~~ ساعتی ۳۰ تومان است. اگر طول صف زیاد باشد، بعضی ازمشتریها، طبق جدول زیر، ازورود به‌این پمپ بنزین منصرف می‌شوند.

پمپ سرکی

| طول صف | درصد مشتریهایی که از ورود منصرف می‌شوند. |
|---|---|
| ۵ – ۱۰ | ۵ |
| ۱۱ – ۱۵ | ۲۰ |
| ۱۶ – ۲۰ | ۴۰ |
| ۲۱ – ۲۵ | ۶۰ |
| بیش از ۲۶ | ۸۰ |

تعداد بهینهٔ پمپها را محاسبه کنید

۱۱. یک مدل $M/M/m$ که آهنگ ورود و خدمت در آن به‌ترتیب ۸ و ۱۲ است، را درنظر بگیرید. هزینهٔ نگهداری هر خدمت‌دهنده هر ساعت ۳۵۰ تومان است. چنانچه فقط یک مشتری درسیستم باشد، خسارت پرداخت شده به اوساعتی ۸۰۰ تومان است. اما اگر بیش از یک مشتری درسیستم باشد، به سایر مشتریها (ازمشتری شمارهٔ ۲ به‌بعد) خسارتی معادل با ساعتی ۱۰۰۰ تومان پرداخت می‌شود. تعداد بهینهٔ خدمت‌دهندگان را تعیین کنید.

۱۲. در یک ایستگاه، که به‌بازرسی قطعات ساخته‌شده می‌پردازد، می‌توان یکی از دو روش بازرسی را اتخاذ کرد. در روش اول، که هزینهٔ آن ۱۵۰۰ تومان است، مدت‌زمان بازرسی دارای توزیع نمایی با میانگین نیم ساعت است. درروش دوم، که هزینهٔ آن معادل ۱۲۰۰ است، بازرسی از دوفعالیت مستقل تشکیل می‌شود، که مدت زمان اجرای هر کدام از آنها دارای توزیع ارلانگی با پارامتر $r = 2$ است. میانگین مدت زمان فعالیتهای اول و دوم این روش، به‌ترتیب، برابر با ۱۲ و ۲۴ دقیقه است. تعداد قطعاتی که برای بازرسی به‌این ایستگاه می‌رسند، براساس فرایند پواسون است ومیانگین فاصلهٔ رسیدن دوقطعهٔ متوالی ۴۰ دقیقه فرض می‌شود. خسارت حاصل ازدیررسیدن هرقطعه برابر با ۸۰۰ تومان است. کدام روش ازنظرهزینه بهتراست؟

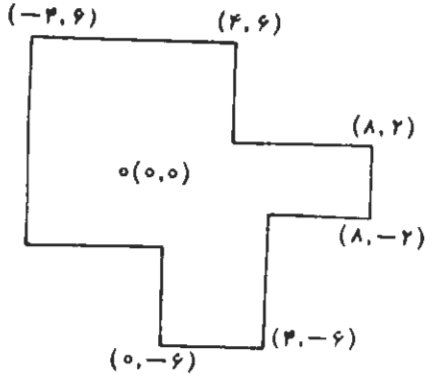
۱۳. یک سیستم صف با یک خدمت‌دهنده را درنظر بگیرید، ورود مشتریها گروهی است. زمان بین ورود دو گروه متوالی، دارای توزیع نمایی بامیانگین ۲۵ دقیقه است. تعداد مشتریهای هر گروه هم متغیر تصادفی پواسون بامیانگین ۶ مشتری فرض می‌شود. مدت‌زمان خدمت نیز نمایی بامیانگین ۳ دقیقه است. هزینهٔ نگهداری هرمشتری درساعت بسته‌به‌اینکه درصف باشد یا درحال خدمت، به‌ترتیب، برابربا ۳۰۰ و ۵۰۰ است. میانگین هزینهٔ این سیستم را درساعت محاسبه کنید.

۱۴. درکارگاهی قطعات سفارشی، با ماشینی که سرعت آن قابل تنظیم است، ساخته می‌شود. مدت‌زمان ساختن هرقطعه، دارای توزیع نمایی است ومیانگین آن بین ۵ تا ۱۵ دقیقه قابل تنظیم است. هزینهٔ ساخت قطعه، بستگی به‌سرعت ماشین دارد. اگر میانگین زمان ساخت قطعه، $x$ دقیقه باشد، هزینهٔ ساخت آن درهر دقیقه برابر با $300x^{-2}$ است.

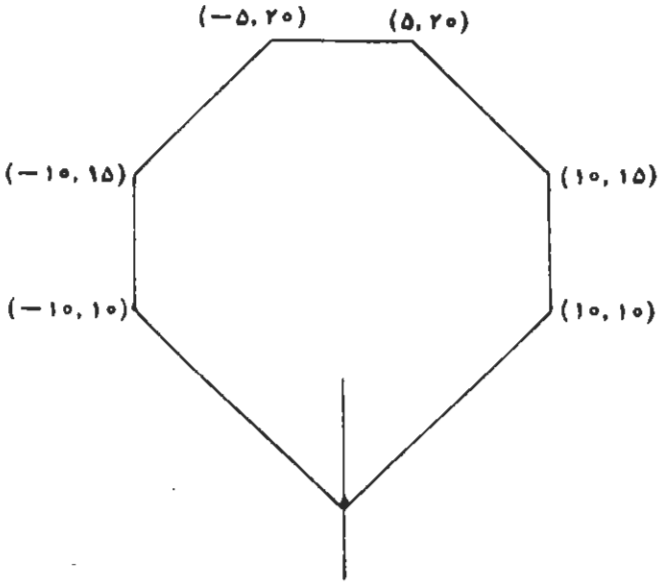


خسارت دیرکرد ساخت هر قطعه در دقیقه برابر با ۶۰۰ است. ورود قطعات به کارگاه براساس فرایند پواسون (با میانگین هر ۱۸ دقیقه یک‌بار) است. سرعت بهینهٔ ماشین را حساب کنید.

۱۵. ایستگاه خدمت درمبدأ مختصات شکل زیرقراردارد. مختصات گوشه‌ها نیزنشان داده شده است. مشتریان در کل مساحت مربوطه، طبق توزیع یکنواخت، پراکنده شده‌اند. میانگین فاصلهٔ یک مشتری را تا ایستگاه خدمت تعیین کنید.




۱۶. درشکل زیر، با فرض پراکندگی یکنواخت مشتریان در سطح کل آن، میانگین فاصلهٔ یک مشتری را تا ایستگاه خدمت، که برمبدأ مختصات منطبق است، محاسبه کنید.



۱۷. کارگاهی به‌شکل مستطیل را درنظر بگیرید که ابعاد آن ۸۰ × ۵۰ متر است. می‌خواهیم چند انبار ابزار در این کارگاه بسازیم. محلهای مناسب برای ایجاد انبار، نقاط وسط ضلعهای مستطیل است. مشتریان انبار، تکنسینها و کارگران هستند، که درسطح کارگاه به‌طور یکنواخت پراکنده‌اند. هرمتقاضی ابزار به‌نزدیکترین انبار مراجعه می‌کند. میانگین فاصلهٔ یك مشتری تا انبار را درحالتهای زیرمحاسبه کنید:

الف. فقط یك انبار دروسط ضلع بزرگ مستطیل ایجاد شود.

ب. فقط یك انبار دروسط ضلع کوچك مستطیل ایجاد شود.

ج. دوانبار دروسط ضلعهای بزرگ مستطیل ایجاد شود.

د. دوانبار دروسط ضلعهای کوچك مستطیل ایجاد شود.

هـ. یك انبار دروسط ضلع کوچك ویکی دروسط ضلع بزرگ ایجادشود.

و. چهارانبار دروسطهای اضلاع مستطیل ایجاد شود.

## مرجعها


1. Cinlar, Erhan; *Introduction to Stochastic Process*, Printice Hall, New York, 1975.
2. Cooper, Robert B.: *Introduction to Queueing Theory*, 2nd edition, Elsevier North – Holland, New York, 1981
3. Gross, D. & C.M. Harris: *Fundamentals of Queueing*, 2nd edition, Wiley, New York, 1984.
4. Hillier, F.S. & G.J. Lieberman: *Introduction to Operations Research*, 4th ed., Holden – Dey Inc., Oakland, 1986.
5. Hines, W. W. & D. C. Montgomery: *Probability & Statistics in Engineering & Management Science*, 2nd. ed., John Wiley & Sons, New York, 1980.
6. Karlin S. & H. Taylor: *First Course in Stochastic Processes*, 2nd ed., Academic Press, New York, 1975.
7. Kleinrock, L.: *Queueing System. Vol. I, Theory*, Wiley New York, 1975.
8. Kleinrock, L.: *Queueing Systems, Vol I: Theory*. Wiley, New York, 1975.
9. Newell, G. F.: *Applications of Queueing Theory*, 2nd ed., Chapman & Hall, London, 1982.
10. Parzen, E.: *Modern Probability Theory & its Application*, Wiley, New York, 1960.
11. Ross S. M.: *Applied Probability Models With Optimization*

*Applications*, Holden – Day, Inc., Sanfrancisco, 1970.

12. Ross, S. M.: Introdution to Probability Models, 3rd ed., Academic Press, New York, 1985.
13. White, J. A., J. W. Schimidt & G. K. Bennett: *Analysis of Queueing Systems*, Academic Press, New York, 1975.

# واژه‌نامه

| | |
|---|---|
| departure rate | آهنگ خروج |
| arrival rate | آهنگ ورود |
| Conditional probability | احتمال شرطی |
| Little's result | استنتاج لیتل |
| independent increment | افزایش مستقل |
| service pattern | الگوی خدمت‌دهی |
| balking | امتناع |
| expected value | امید ریاضی |
| conditional expectation | امید شرطی |
| standard deviation | انحراف معیار |
| firstin - firstout | به‌ترتیب |
| optimization | بهینه‌سازی |
| convulution | پیچش |
| independent events | پیشامدهای مستقل |
| dependent events | پیشامدهای وابسته |
| density function | تابع چگالی |
| probability distribution function | تابع توزیع احتمال |
| cumulative distribution function | تابع توزیع تجمعی |
| joint distribution Function | تابع توزیع توأم |

| | |
|---|---|
| convex Function | تابع محدب |
| moment generation Function | تابع مولدگشتاور |
| approximation | تقریب |
| Erlangen distribution | توزیع ارلانگی |
| Bernoulli distribution | توزیع برنولی |
| poisson distribution | توزیع پواسون |
| marginal distribution | توزیع حاشیه‌ای |
| limiting distribution | توزیع حدی |
| binomial distribution | توزیع دوجمله‌ای |
| hyper_exponential distribution | توزیع فوق نمایی |
| deterministic distribution | توزیع قطعی |
| Gamma distribution | توزیع گاما |
| normal distribution | توزیع نرمال |
| exponential distribution | توزیع نمایی |
| geometric distribution | توزیع هندسی |
| uniform distribution | توزیع یکنواخت |
| customers population | جمعیت مشتریان بالقوه |
| busy cycle | چرخهٔ اشتغال سیستم |
| ergodic state | حالت ارگودیک |
| null recurrent state | حالت برگشت‌پذیر تهی |
| positive recurrent state | حالت برگشت‌پذیرمثبت |
| steady_state | حالت پایدار |
| absorbing state | حالت جاذب |
| state of the system | حالت سیستم |
| server | خدمت‌دهنده |
| bulk service | خدمت گروهی |
| busy period | دورهٔ اشتغال سیستم |
| waiting time | زمان انتظار |
| inter-arrival time | زمان بین دو ورود |



| | |
|---|---|
| continuous time Markov chain | زنجیرهٔ مارکوف بازمان پیوسته |
| imbeded Markov chain | زنجیرهٔ محاطی مارکوف |
| series | سری |
| networks of queue | شبکه‌های صف |
| queue, waiting line | صف |
| utilization factor | ضریب بهره‌وری |
| finite capacity | ظرفیت متناهی |
| infinite capacity | ظرفیت نامتناهی |
| poisson process | فرایند پواسون |
| pure birth process | فرایند تولد خالص |
| stochastic process | فرایند تصادفی |
| Markov process | فرایند مارکوف |
| bayes' formula | فرمول بیز |
| sample space | فضای نمونه |
| law of large numbers | قانون اعداد بزرگ |
| central limit theorem | قضیهٔ حد مرکزی |
| covariance | کوواریانس |
| transition rate matrix | ماتریس آهنگ‌گذار |
| transition matrix | ماتریس گذار |
| Markov matrix | ماتریس مارکوف |
| square matrix | ماتریس مربع |
| unit matrix | ماتریس یکه |
| independent random variables | متغیرهای تصادفی مستقل |
| countable set | مجموعهٔ قابل شمارش |
| polya model | مدل پولیا |
| exponential models | مدلهای نمایی |

| | |
|---|---|
| communication of states | مرتبط بودن حالتها |
| backward equation | معادلهٔ پسرو |
| forward equation | معادلهٔ پیشرو |
| difference equation | معادلهٔ تفاضلی |
| differential equation | معادلهٔ دیفرانسیل |
| Kolmogorov equation | معادلهٔ کولموگروف |
| characteristic equation | معادلهٔ مشخصه |
| mean recurrence time | میانگین زمان برگشت |
| aperiodic | نادوره‌ای |
| system Discipline | نظم سیستم |
| rate diagram | نمودار آهنگ |
| variance | واریانس |
| convergence | همگرایی |
| homogenous | همگن |